Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Sommersemester 2010

Analysis IIIb

Prof. Griewank

Bodo Graumann

19. Mai 2014

XeTeX Der Code wurde mit `gvim` sowie `vim-latex` erstellt und mit `xelatex` kompiliert – all das auf `Gentoo Linux`. Meinen Dank an die Freie Software Community und die TeX-Kollegen auf TeX.SX für ihre Hinweise und Unterstützung.
Bitte schreibt mir eure Kommentare und Verbesserungsvorschläge zu diesem Dokument! Ihr könnt mir entweder direkt mailen oder das Kontaktformular auf meiner Internetseite benutzen.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung in die Maß- und Integrationstheorie

1.1 σ-Algebren und Maße

Folgende Eigenschaften sind wünschenswert für ein „Volumenmaß“ $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$:

Monotonie $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

Quaderwert $\mu([a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \cdots \times [a_n,b_n]) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$

Translationsinvarianz $\forall A \subseteq \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}^n\colon \mu(A+r) = \mu(A)$

σ-**Additivität** für eine abzählbare Familie paarweise disjunkter Mengen A_i gilt

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$$

1 **Satz: Maßparadoxon**
Es existiert kein totales Maß mit den gewünschten Eigenschaften auf $\mathbb{R}^n$.

Beweis (1) Wir betrachten die Äquivalenzrelation

$$x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$$

Dazu sei $A \subset [0,1]^n$ eine Menge von Repräsentanten. (Dabei ist $|A| > |\mathbb{N}|$).

$$[0,1]^n \subset B := \bigcup_{r\in[-1,1]^n\cap\mathbb{Q}^n} (A+r) \subset [-1,2]^n$$

Aufgrund der Monotonie und σ-Additivität gilt dann

$$1 = \mu\left([0,1^n]\right) \leq \mu(B) = \mu\left(\bigcup_{r\in[-1,1]^n\cap\mathbb{Q}^n} (A+r)\right) = \sum_{r\in[-1,1]^n\cap\mathbb{Q}^n} \mu(A+r)$$
$$= \sum_{r\in[-1,1]^n\cap\mathbb{Q}^n} \mu(A) \leq \mu\left([-1,2]^n\right) = 3^n$$

Dies ist jedoch für keinen möglichen Wert von $\mu(A)$ erfüllt. $\lightning$

Weiteres Gegenbeispiel: „Banach-Tarski-Paradoxon“ Die Kugeln B_1 und B_2 sind stückweise kongruent.
Wir müssen also $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ einschränken.

2 **Definition: „Ring, Algebra, σ-Algebra“**
Ein Mengensystem $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt

(i) Ring: $\emptyset \in S$, $A, B \in S \Rightarrow A \cup B \in S \wedge A \setminus B \in S$

(ii) Algebra: wenn zusätzlich $A \in S \Rightarrow \bar{A} \in S$ gilt.

(iii) σ-Algebra: wenn weiterhin für eine abzählbare Familie $A_i \subset S$ gilt $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in S$.

Beispiele $\{\varnothing, X\}$ ist eine σ-Algebra.
Für $A \subseteq X$ ist $\{\varnothing, A\}$ ein Ring und $\{\varnothing, A, \bar{A}, X\}$ eine σ-Algebra.
$\{ A \subseteq X \mid \min(|A|, |\bar{A}|) \leq |\mathbb{N}| \}$ ist eine σ-Algebra

3 **Lemma: Eigenschaften von Ringen, Algebren**

(i) Die Menge der σ-Algebren ist unter Schnitt abgeschlossen.

(ii) $\mathcal{A}_\sigma(S) := \bigcap_{S \subset \tilde{S}} \tilde{S}$ ist die durch S erzeugte σ-Algebra.

(iii) Die von den offenen bzw. abgeschlossenen Mengen erzeugte σ-Algebra heißt *Borel-Menge*.

4 **Definition: „Inhalt, σ-Inhalt, Maß, messbar, Nullmenge“**

Eine Funktion $\mu: S \to [0, \infty]$ heißt

(i) Inhalt: $A, B \in S, A \cap B = \varnothing \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, insbesondere $\mu(\varnothing) = 0$.

(ii) σ-Inhalt: falls zusätzlich für $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset S$ mit $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in S$ und $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$ gilt $\mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$

(iii) Maß: wenn sie σ-Inhalt auf einer σ-Algebra ist.
Jede Menge $A \in S$ heißt dann *messbar* und diejenigen mit $\mu(A) = 0$ heißen *Nullmengen*.

5 **Lemma: Eigenschaften von Inhalten**

(i) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

(ii) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$

(iii) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$

(iv) Sind $\{A_i\} \subset S$ paarweise disjunkt und $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in S$, so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) \geq \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$$

6 **Lemma: Eigenschaften von σ-Inhalten**

(i) $\bigcup_{i=1}^\infty A_i, A_i \in S \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$

(ii) Stetigkeit von unten: Seien $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_m \subseteq \cdots$, dann gilt

$$\lim_{m\to\infty} \mu(A_m) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^\infty A_m\right)$$

(iii) Stetigkeit von oben: Seien $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_m \supseteq \cdots$, dann gilt

$$\lim_{m\to\infty} \mu(A_m) = \mu\left(\bigcap_{m=1}^\infty A_m\right)$$

Idee Maße lassen sich als Restriktionen von äußeren Maßen auf messbare Mengensysteme definieren. Die äußeren Maße können aus Inhalten auf Ringen $S \subset \mathcal{P}(X)$ für ganz $\mathcal{P}(X)$ definiert werden. Zunächst führen wir den Restriktionsschritt nach Caratheodory durch.

7 **Definition: „äußeres Maß"**

Eine Funktion $\mu^*: \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ heißt *äußeres Maß*, falls

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) Monotonie: $A \subset B \subset X \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

(iii) σ-Subadditivität: $\mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$

Beispiele für äußere Maße Für $X \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt können wir den *äußeren Jordan-Inhalt* definieren als

$$\mu^*(A) = \inf_{\text{endliche Überdeckungen von } A} \left(\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \right)$$

Damit erhalten wir kein Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, da μ^* nicht additiv ist. Betrachten wir beispielsweise die rationale Zahlen A und die irrationalen Zahlen B in $[0, 1]$, so hat jede Überdeckung von A als auch von B die Größe 1 aufgrund der Dichtheit. Somit erhalten wir $\mu^*(A \cup B) = 1 < 2 = \mu^*(A) + \mu^*(B)$, die Subadditivität.

8 **Definition: „μ^*-messbar"**

Eine Menge $A \in \mathcal{P}(X)$ heißt μ^*-messbar für ein gegebenes äußeres Maß μ^* auf X falls

$$\forall E \subseteq X: \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \bar{A})$$

9 **Satz: Caratheodory**

Die Menge S aller μ^*-messbaren Mengen $A \subseteq X$ ist eine σ-Algebra S_{μ^*} und die Restriktion $\bar{\mu} := \mu^*|_{S_{\mu^*}}$ von μ^* auf $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist ein Maß.

Beweis (9) Nach Definition gilt $A \in S \Leftrightarrow \bar{A} \in S$. Um zu zeigen, dass wir eine Algebra haben, müssen wir zeigen, dass $A, B \in S \Rightarrow A \cup B \in S$ gilt. Haben wir $A, B \in S$ so gilt mit der Subadditivität

$$\begin{aligned}
&\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap \bar{B}) = \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap \bar{B} \cap A) + \mu^*(E \cap \bar{B} \cap \bar{A}) \\
&(E \cap B) \cup (E \cap \bar{B} \cap A) = E \cap (A \cup B) \\
&\Rightarrow \mu^*(A \cap B) + \mu^*(E \cap \bar{B} \cap A) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) \\
&\Rightarrow \mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \mathbin{\bar{\cup}} B))
\end{aligned}$$

Wegen Subadditivität gilt dann die Gleichheit und S ist eine Algebra. Nun fehlt noch die σ-Additivität. O.B.d.A betrachten wir eine Menge von paarweise disjunkten Mengen A_i. Dann haben wir mit $B_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ eine monoton wachsende Mengenkette von μ^*-messbaren Mengen:

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap \bar{B}_n) \geq \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap \bar{A})$$
$$\mu^*(E \cap B_n) = \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap \bar{A}) = \mu^*(E \cap A^n) + \mu^*(E \cap B_{n-1})$$
$$= \mu^*(E \cap A_n) + \mu(E \cap A_{n-1}) + \mu^*(E \cap B_{n-2}) = \cdots = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_n)$$
$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\colon \mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap \bar{A}) + \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i)$$
$$\Rightarrow \mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap \bar(A)) + \sum_{i=1}^{\infty} (E \cap A_i) \geq \mu^*(E \cap \bar{A}) + \mu^*(E \cap A)$$

Wodurch wieder nur die Gleichheit möglich ist. S ist somit als σ-Algebra erwiesen.

Seien nun $A, B \in S$, $A \cap B = \emptyset$, dann gilt

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap B) + \mu^*((A \cup B) \cap \bar{B}) = \mu^*(B) + \mu^*(A)$$

wegen der μ^*-Messbarkeit von B. Dies ist die Additivität von $\bar{\mu}$. Weiter erhalten wir σ-Additivität mit:

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad A_i \in S, \quad i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$
$$\forall n \in \mathbb{N}\colon \mu^*(A) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^* A_i$$
$$\Rightarrow \mu^*(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

und Subadditivität. □

10 Definition: „vollständig, endlich, σ-endlich“

Ein Maß μ auf $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt

(i) *vollständig*, falls $A \subset B \in S \wedge \mu(B) = 0 \Rightarrow A \in S \wedge \mu(A) = 0$.

(ii) *endlich*, falls $\mu(X) < \infty$

(iii) *σ-endlich*, falls $\exists A_i \in S, \mu(A_i) < \infty\colon X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

11 Korollar: Vollständigkeit der Maße nach Satz 9 (Caratheodory)

Jedes Maß, dass nach Satz 9 (Caratheodory) konstruiert wurde, ist vollständig.

Beweis (11) Sei $A \subseteq B \in S$ mit $\mu(B) = 0 = \mu^*(B)$. Dann gilt $\mu^*(A) = 0 \Rightarrow \mu^*(A \cap E) = 0$ für $E \subseteq X$. Weiter gilt $E \subseteq X \Rightarrow \mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \bar{A}) = 0 + \mu^*(E \cap \bar{A}) \leq \mu^*(E)$ wegen der Monotonie. Also gilt die Gleichheit $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \bar{A})$: A ist μ^*-messbar und $A \in S$.

Wie definieren wir äußere Maße? Durch Erweiterung von Inhalten auf Ringen!

12 **Satz: von Inhalten induzierte äußere Maße**
Falls μ ein Inhalt auf einem Ring $R \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist, dann wird durch

$$\mu^*(A) := \inf\left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in R\right)$$

ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(X)$ definiert.

Beweis (12) Wegen $\emptyset \in R$ gilt $\mu^*(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Falls $B \subseteq A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ so sind die A_i auch abzählbare Überdeckungen von B, sodass $\mu^*(B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, also $\mu^*(B) \leq \mu^*(A)$.

Zum Beweis der σ-Subadditivität betrachte man $A = \sum_{i=1} \infty A_i$ mit $A_i \subseteq X$. Dann existiert für beliebiges $\varepsilon > 0$ und jedes i eine Folge $(C_{ij})_{j=1}^{\infty}$ sodass $\mu^*(A_i) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(C_{ij}) - \varepsilon 2^{-i}$ wobei $A_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_{ij}$. Also folgt

$$\mu^*(A) = \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \mu^*\left|\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} C_{ij}\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(C_{ij})\right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty}\left(\mu^*(A_i) + \varepsilon 2^{-i}\right) = \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

Da ε beliebig klein gewählt werden kann, ist die σ-Subadditivität gezeigt.

Beispiel Wir betrachten den Ring $R = \{\ (a, b] \subset \mathbb{R} \mid -\infty \leq a \leq b < \infty\ \}$ mit $\mu\left((a, b]\right) = (b - a)$.

Behauptung: $\mu^*(\mathbb{Q}) = 0$ und damit ist $\mathbb{Q}$ messbar bezüglich μ^*.

Wir betrachten die Aufzählung $\mathbb{Q} = \left\{q_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ und deren Überdeckung durch $A_i = \left(q_i - \varepsilon 2^{-i}, q_i\right]$ für festes $\varepsilon > 0$ und $i = 1, \cdots, \infty$. Dann gilt

$$\mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in R$$

$$\Rightarrow \mu^*(\mathbb{Q}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-i} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \mu^*(\mathbb{Q}) = 0$$

Bemerkung Wenn μ^* durch endliche Überdeckungen definiert ist, gilt $\mu^*((a, b) \cap \mathbb{Q}) = b - a > 0$ und $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ ist nicht messbar, da die Additivität verletzt ist.

13 **Satz:**

Sei μ^* das nach Satz 12 (von Inhalten induzierte äußere Maße) aus dem Inhalt μ auf dem Ring R konstruierte äußere Maß und $\bar{\mu}$ das nach Satz 9 (Caratheodory) daraus konstruierte Maß auf der σ-Algebra S. Dann gilt $R \subseteq S$, das heißt alle $A \subseteq R$ sind μ^*-messbar und $\mu = \bar{\mu}|_R$ falls μ schon σ-Inhalt ist.

Beweis (13) Für beliebiges $E \subseteq X$ existieren $A_i \in R$, sodass $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ für paarweise disjunkte A_i und

$$\forall \varepsilon > 0\colon \mu^*(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) - \varepsilon$$

oder $\mu^*(E) = \infty$. Nehmen zunächst einmal an, dass $\mu^*(E) < \infty$, dann gilt für beliebiges $A \in R$:

$$A_i = (A_i \cap A) \cup (A_i \cap \bar{A})$$
$$\mu(A_i) = \mu(A_i \cap A) + \mu(A_i \setminus A)$$

Einsetzen ergibt

$$\varepsilon + \mu^*(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i \cap A) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i \setminus A)$$
$$\geq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap A\right) + \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus A\right) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$$

O.B.d.A. $\varepsilon \to 0$ und somit gilt zusammen mit der Subadditivität

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$$

Also ist A messbar, sodass in der Tat $R \subseteq S$.

Da $A \in R$ bereits sich selbst überdeckt, gilt $\mu^*(A) = \bar{\mu}(A) \leq \mu(A)$. Angenommen es wäre sogar $\mu^*(A) < \mu(A)$. Dann gäbe es eine Überdeckung $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset A$ mit $A_i \in R$ und

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) < \mu(A)$$

O.B.d.A seien die A_i disjunkt (da wir uns im Ring R befinden). Dann gilt aufgrund der Monotonie

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cap A) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap A\right) = \mu(A) \lightning$$

Die Annahme ist also falsch, es gilt $\mu^*(A) = \bar{\mu}(A) = \mu(A)$.

14 **Lemma: Quasi-Messbarkeit**

Das aus μ auf $R \subseteq \mathcal{P}(X)$ konstruierte äußere Maß μ^* ist *regulär* in dem Sinne, dass für alle $E \subseteq X$ ein A in der von R erzeugten σ-Algebra $S_0 = \mathcal{A}_\sigma(R)$ existiert, sodass

$$\mu^*(E) = \mu^*(A)$$

Beweis (14) Wegen der Monotonie gilt auszuschließen, dass

$$\mu^*(E) < \inf_{A\in S_0, E\subseteq A}(\mu^*(A))$$

insbesondere $\mu^*(E) < \infty$. Dann existierte wiederum eine disjunkte Überdeckung $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ mit $A_i \in R$.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) < \inf_{A\in S_0, E\subseteq A}(\mu^*(A))$$

Damit aber

$$\mu^*(A) = \bar{\mu}(A) < \inf_{A\in S_0, E\subseteq A}(\mu^*(A)) \quad \lightning$$

15 **Satz: Vervollständigung eines Maßes**

Sei μ ein Maß auf $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ und

$$N := \left\{ B \subseteq X \;\middle|\; B_0 \supset B, B_0 \in S, \mu(B_0) = 0 \right\}$$

Dann ist

$$\tilde{S} := \{ A \cup B \mid A \in S, B \in N \}$$

eine σ-Algebra und die Funktion

$$\bar{\mu}(A \cup B) = \mu(A), \quad A \in S, B \in N$$

ein vollständiges Maß auf $\tilde{S}$.

16 **Satz:**

Sei μ ein σ-endlicher σ-Inhalt auf einem Ring $R \subseteq \mathcal{P}(X)$, μ^* das durch μ auf $\mathcal{P}(X)$ erzeugte äußere Maß, S_0 die durch R erzeugte σ-Algebra in $\mathcal{P}(X)$, S das System der μ^*-messbaren Elemente von $\mathcal{P}(X)$ und $\bar{S}_0$ die Vervollständigkeit von S_0 nach Satz 15 (Vervollständigung eines Maßes). Mit $\bar{\mu} := \mu^*|_S$ und $\mu_0 := \mu|_{S_0}$ ist $\bar{\mu}$ die Vervollständigung von μ_0 auf $S = \bar{S}_0$.

Beweis (16)

(i) $\bar{S}_0 \subseteq S$:

$E \subseteq \bar{S}_0 \Rightarrow E = A \cup B$ mit $A \in S_0$ und $B \subseteq \bar{B}$ wobei $\mu^*(B) = \mu^*(\bar{B}) = 0$. Dann ist $A \in S \supseteq S_0$, $\mu^*(B) = 0 \Rightarrow B \in S$ da alle μ^*-Nullmengen messbar sind folgt $A \cup B \in S$.

(ii) $\bar{S}_0 \supseteq S$:

$E \in S \Rightarrow \exists A \in S_0 \colon A \supseteq E \wedge \mu^*(A) = \mu^*(E) = \bar{\mu}(E)$. Da E messbar ist folgt $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \bar{E}) = \mu^*(E) + \mu^*(A \setminus E)$. $\mu^*(A \setminus E) = 0$. Außerdem existiert $B \in S_0$, so

dass $B \supseteq A \setminus E$ und $\mu^*(B) = \mu^*(A \setminus E) = 0$. Also gilt schließlich $E = \underbrace{(A \setminus B)}_{\in S_0} \cup \underbrace{(E \cap B)}_{\in N}$.
Hierbei wurde vorausgesetzt $\mu^*(E) < \infty$. Falls $\mu^*(E) = \infty$ folgt aus vorausgesetzter σ-Endlichkeit

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i, \quad X_i \in R, \mu(X_i) < \infty$$

nach obiger Aussage gilt für $E \in S$, dass $E_i = E \cap X_i = A_i \cup C_i$ mit $A_i \in S_0$ und $C_i \in N$. Daraus folgt

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cup C_i) = \underbrace{\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)}_{\in S_0} \cup \underbrace{\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \right)}_{N} \in \bar{S}_0$$

17 **Satz: Eindeutigkeit der Erweiterung**
Falls μ ein σ-endlicher σ-Inhalt auf dem Ring R ist, dann existiert genau ein Maß μ_0 auf der von R erzeugten σ-Algebra $S_0 = \sigma(R)$.

Beweis (17) Angenommen $\tilde{\mu}$ ist ein Maß auf S_0 mit $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$ für $A \in R$. Sei μ^* wiederum das durch μ erzeugte äußere Maß auf $\mathcal{P}(X)$. Dann gilt für ein beliebiges $A \in S_0$:

$$\mu(A) = \mu^*(A) = \inf \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \right), \quad A \subseteq \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$$
$$\inf \left(\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_i) \right) = \inf \left(\tilde{\mu} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \right) \geq \inf \tilde{\mu}(A) = \tilde{\mu}(A)$$

Wegen der Monotonietät $\tilde{\mu}$. Also gilt $\tilde{\mu}(A) \leq \mu_0(A)$ für $A \in S_0$.
Betrachte nun $\bar{A} \supseteq A$ mit $\bar{A} \in R$. Dann folgt $\bar{A} \setminus A \in S_0$ und somit nach Symmetrie $\tilde{\mu}(\bar{A} \setminus A) \leq \mu_0(\bar{A} \setminus A)$. Daraus folgt wegen der Additivität $\tilde{\mu}(\bar{A}) = \tilde{\mu}(\bar{A} \setminus A) + \tilde{\mu}(A) \leq \mu_0(\bar{A} \setminus A) + \mu_0(A) = \mu_0(\bar{A})$. Da $\bar{A} \in R$ voraussgesetzt war, gilt $\tilde{\mu}(\bar{A}) = \mu_0(\bar{A})$ und somit überall Gleichheit: $\tilde{\mu}(A) = \mu_0(A)$.
Da μ als σ-endlich vorausgesetzt war, gilt

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i, \quad X_i \subseteq R, \mu(X_i) < \infty$$
$$A \in S_0 \Rightarrow A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap X_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

mit $A_i \in S_0$, $A_i \subseteq X_i \in R$ für $\bar{A} = X_i$ folgt aus obigem Beweis $\tilde{\mu}(A_i) = \mu_0(A_i)$. Zusammen mit der σ-Additivität gilt also $\tilde{\mu}(A) = \mu_0(A)$ für alle $A \in S_0$.

1.2 Lebesgue-Maß

Wir betrachten die halboffenen Quader:

$$Q := \bigtimes_{i=1}^{n} \left[a_i, b_i\right) \subset \mathbb{R}^n$$

für $-\infty < a_i \leq b_i < \infty$ und sogenannte „Figuren“

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} Q_i$$

Die Figuren bilden einen Ring aber keine Algebra, da nur Differenzen, aber keine Komplemente enthalten sind. Nun definieren wir einen Inhalt λ_n wiefolgt:

$$\lambda_n(Q) := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

und entsprechend für eine disjunkte Zerlegung einer Figur $A = \bigsqcup_{i=1}^{m} Q_i$:

$$\lambda_n(A) := \sum_{i=1}^{m} (\lambda_n(Q_i)) \in [0, \infty)$$

18 **Lemma:**

λ_n ist auf dem Ring R der Figuren ein σ-endlicher σ-Inhalt.

19 **Definition: „Lebesgue-Maß“**

Sei λ_n^* das von λ_n auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ erzeugte äußere Maß und $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ die λ_n^*-messbaren Mengen in $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ dann erweitern wir λ_n zum *Lebesgue-Maß*:

$$\lambda_n := \lambda_n^*|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$$

Ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ die von R erzeugte σ-Algebra der Borel-Mengen, dann nennen wir $\bar{\lambda}_n = \lambda_n|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$ das *Borel-Lebesgue-Maß*.

Beobachtung $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ist die Vervollständigung von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ durch Nullmengen und $\bar{\lambda}_n$ einzige Erweiterung von λ_n von den Figuren auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

20 **Satz: Notwendige und hinreichende Bedingung für Lebesguemessbarkeit**

$$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists U_\varepsilon = \operatorname{Int}(U_\varepsilon) \supseteq A, V_\varepsilon = \overline{V_\varepsilon} \subseteq A : \lambda_n^*(U_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon \wedge \lambda_n^*(A \setminus V_\varepsilon) < \varepsilon$$

Wobei bereits die Existenz der offenen Obermengen oder abgeschlossenen Teilmengen ausreicht, da $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ unter Komplementbildung abgeschlossen ist.

Beweis (20) Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ wobei $A_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} Q_{ij}$ mit

$$\frac{\varepsilon}{2} + \lambda_n(A) = \frac{\varepsilon}{2} + \lambda_n^*(A) > \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(A_i) = \sum_{i,j} \lambda_n(Q_{ij}) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(Q_k)$$

für eine geeignete Abzählung der Q_{ij} als Q_k. Dann existiert für jedes k ein offenes $\tilde{Q}_k$

$$\tilde{Q}_k = \bigtimes_{i=1}^{n} \left(\tilde{a}_i, b_i\right) \supseteq Q_k$$

mit $\tilde{a}_i < a_i$ nahe genug sodass

$$\lambda_n(\tilde{Q}_k) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - \tilde{a}_i) < \lambda_n(Q_k) + \varepsilon 2^{-k-1}$$

ist. Dann setzen wir

$$U_\varepsilon := \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{Q}_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$

mit Maß

$$\lambda_n^*(U_\varepsilon) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(\tilde{Q}_k) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(Q_k) \leq \varepsilon + \lambda_n(A)$$
$$\Rightarrow \lambda_n(U_\varepsilon \setminus A) = \lambda_n(U_\varepsilon) - \lambda_n(A) < \varepsilon$$

Damit wurde die Hinrichtung gezeigt. Nun wollen wir die Rückrichtung beweisen:

Sei $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_{\frac{1}{k}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mu\left(U_{\frac{1}{k}} \setminus A\right) < \frac{1}{k}$. Dann ist $A \subseteq B$. Sei $N := B \setminus A$, dann folgt wegen der Monotonie des äußeren Maßes mit $N \subseteq U_{\frac{1}{k}} \setminus A$: $\lambda_n^*(N) \leq \lambda_n^*(U_{\frac{1}{k}} \setminus A) < \varepsilon \Rightarrow \lambda_n^*(N) = 0$.

21 **Korollar:**

Für ein $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\lambda_n(A) = \inf \{ \lambda(U) \mid U \text{ offen}, U \supseteq A \}$$
$$\lambda_n(A) = \sup \{ \lambda(U) \mid U \text{ abgeschlossen}, U \subseteq A \}$$

1.2.1 Verhalten von λ_n unter Abbildungen

22 **Satz:**

Sei $N \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ mit $\lambda_n(N) = 0$ und $T \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist auch $\lambda_n(T(A)) = 0$.

23 **Satz:**

(i) Sei $T\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ abgeschlossen (d.h. das Bild einer abgeschlossenen Menge ist wieder abgeschlossen) und stetig differenzierbar. Dann ist $T(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Ist $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine umkehrbare lineare Abbildung, dann ist für jedes $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$:

$$\lambda_n(L(A)) = |\det L|\lambda_n(A)$$

24 **Korollar:**

Ist $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine euklidische Bewegung, also $F(x) = L(x) + \vec{a}$ mit L orthogonal, dann ist $\lambda_n(F(A)) = \lambda_n(L(A)) = \lambda_n(A)$.

1.3 Messbare Funktionen

Es soll ein Integralbegriff definiert werden, der das Riemann-Integral erweitert. Beispielsweise ist die Dirichlet-Funktion $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ nicht Riemann-integriebar, da jedes Teilintervall einer endlichen Zerlegung von $[a, b]$ sowohl rationale als auch irrationale Stellen enthält.

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Es sollen Integrale für Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$ definiert werden. Es muss dazu eine Teilmenge „geeigneter“ Funktionen ausgewählt werden (nach Banach-Tarski-Paradoxon).

25 **Definition: „Spur-σ-Algebra“**

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum sowie $E \subseteq X$. Dann ist $\mathcal{A}_E = \mathcal{A} \cap E = \{ A \cap E \mid A \in \mathcal{A} \}$ die von A auf E induzierte *Spur-σ-Algebra*.

26 **Definition: „messbare Funktion“**

Seien $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ messbare Räume und $E \subseteq X$ dann heißt $f\colon E \to Y$ $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-*messbar*, wenn $\forall B \in \mathcal{B}\colon f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_E$.

27 **Satz: Eigenschaften messbarer Funktionen**

(i) Falls $\mathcal{B}$ von einem System $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ erzeugt wird, dann ist $f\colon X \to Y$ genau dann $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-messbar, wenn $\forall S \in \mathcal{S}\colon f^{-1}(S) \in \mathcal{A}_E$.

(ii) Ist $f\colon X \to Y$ $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-messbar und $E \subseteq X$, dann ist auch $f|_E$ $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-messbar.

(iii) Sei $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, $X_i \in \mathcal{A}$, dann ist die $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-Messbarkeit auf jedem X_i hinreichend für die $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-Messbarkeit auf ganz X.

(iv) Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum und $N \subseteq X$ eine Nullmenge, dann ist $f|_N$ auch $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-messbar. Insbesondere gilt: Sind $f, g\colon X \to Y$ Abbildungen mit f messbar und g nur auf einer Nullmenge von f verschieden, dann ist auch g messbar.

Ist (Y, d) ein metrischer Raum, so wird in der Regel die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}$ verwendet.

28 **Definition: „Borel-messbare Funktionen“**

Seien $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer und $(Y, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, dann heißt $f : X \to Y$ $\mathcal{A}$-messbar, falls sie $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(Y))$-messbar ist. Insbesondere ist f $\mathcal{A}$-messbar, falls $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ für alle $U \in \mathcal{O}$.

29 **Korollar:**

Seien $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer und (Y_1, d_1), (Y_2, d_2) metrische Räume sowie $h : Y_1 \to Y_2$ stetig. Dann ist für jede $\mathcal{A}$-messbare Abbildung $f : X \to Y$ auch $h \circ f$ $\mathcal{A}$-messbar.

Beweis (29) Sei $V \subseteq Y_2$ offen. Dann ist auch $U = h^{-1}(V)$ offen und

$$(h \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(h^{-1}(V)) = f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$$

30 **Korollar:**

Seien $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist $\mathcal{A}$-messbar

(ii) $\forall a \in \mathbb{R} : \{ x \in X \mid f(x) \geq a \} \in \mathcal{A}$

(iii) $\forall a \in \mathbb{R} : \{ x \in X \mid f(x) > a \} \in \mathcal{A}$

(iv) $\forall a \in \mathbb{R} : \{ x \in X \mid f(x) \leq a \} \in \mathcal{A}$

(v) $\forall a \in \mathbb{R} : \{ x \in X \mid f(x) < a \} \in \mathcal{A}$

Zur einfacheren Formulierung von Konvergenzaussagen erweitern wir $\mathbb{R}$ durch Hinzufügen von $+\infty$ und $-\infty$ zu $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, +\infty\}$. Dabei setzen wir

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$$
$$(\pm\infty) + a = a + (\pm\infty) = \pm\infty$$
$$(\pm\infty) \cdot a = a \cdot (\pm\infty) = \operatorname{sgn}(a) \cdot \pm\infty$$
$$(+\infty) + (-\infty) = (-\infty) + (+\infty) = 0$$
$$(\pm\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (\pm\infty) = 0$$

Damit ist $\overline{\mathbb{R}}$ bezüglich $+$ und $\cdot$ abgeschlossen. Die Operationen sind weiterhin kommutativ jedoch nicht mehr assoziativ. Die Topologie ist dann: $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, wenn $A \cap \mathbb{R}$ offen und $+\infty \in A \Rightarrow \exists a \in \mathbb{R} : (a, +\infty] \subseteq A$, $-\infty \in A \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} : (-\infty, b] \subseteq A$

Funktionen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ heißen *numerische Funktionen*.

31 **Definition: „“**

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, dann heißt $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar, falls sie $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-messbar ist.

32 **Bemerkung:**
Die obige Charakterisierung $\mathcal{A}$-messbarer Funktionen überträgt sich auch auf numerische Funktionen.

33 **Satz:**
Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum.

(i) Sind $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar, so auch $f \pm g$, $f \cdot g$, $\max(f, g)$, $|f|$.

(ii) $f = (f_1, \cdots, f_n)\colon X \to \mathbb{R}^n$ ist $\mathcal{A}$-messbar genau dann, wenn jedes f_i $\mathcal{A}$-messbar ist.

(iii) $f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$ seien $\mathcal{A}$-messbar. Dann sind auch $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ und $\liminf_{n\to\infty} f_n$ $\mathcal{A}$-messbar.

34 **Bemerkung: zu numerischen Funktionen**

(i) Der Name ist etwas merwürdig. Im Englischen sagt man „Extended Real Valued Function“.

(ii) Hierarchie der Beliebigkeit: die Frage wie man $0 \circ \infty$ oder $\infty - \infty$ definiert ist nicht allgemein festgelegt.

(iii) Es gab und gibt viele Versuche $\mathbb{R}$ um unendliche Größen zu erweitern, sodass algebraische Eigenschaften erhalten bleiben. (Nichtstandard Methoden / Nonstandard Analysis)

(iv) Bis auf weiteres sind Fallunterscheidungen nötig.

35 **Definition: „Einfache Funktionen“**

(i) Für $A \subseteq X$ definiert man die *charakteristische Funktion*

$$\mathbf{1}\colon X \to \{0,1\}\,, \quad \mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

$\mathbf{1}_A$ ist dann $\mathcal{A}$-messbar, wenn $\mathbf{1}_A^{-1}(1) = A \in \mathcal{A}$.

(ii) $f\colon X \to \mathbb{R}$ heißt *einfach*, wenn für n disjunkte Mengen $A_i \subseteq X$ und reelle Koeffizienten $c_i \in \mathbb{R}$

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{1}_{A_i}$$

Äquivalent kann man verlangen dass f auf X nur endlich viele unterschiedliche Werte in $\mathbb{R}$ annimmt.

36 **Satz: einfache Annäherbarkeit von messbaren Funktionen**
Falls $f\colon X \to [0, \infty]$ messbar ist, dann ist sie monoton von unten durch messbare einfache Funktionen $f_k\colon X \to [0, \infty)$ annährbar. Das heißt $f_k(x) \nearrow f(x)$ für alle $x \in X$.

Beweis (36) Betrachte zunächst die einfachen Funktionen $\varphi_k\colon [0,\infty] \to [0,\infty]$ mit $\varphi_k(y) \nearrow y$ für alle $y \in [0,\infty)$. (Konstruktion erfolgt später). Dann folgt unmittelbar für $f_k(x) = \varphi_k(f(x))$, dass $f_k(x) \nearrow \varphi_k(f(x)) = \varphi(f(x)) = f(x)$. Nach der Kettenregel folgt die Messbarkeit von f_k aus der von f und φ_k.

Definition der φ_k:

$$\varphi_k(y) = \begin{cases} k, & y \geq k \\ \frac{i-1}{2^k}, & \frac{i-1}{2^k} \leq y < \frac{i}{2^k}, \quad 1 \leq i \leq k2^k \end{cases}$$

37 **Satz: Messbarkeit bei punktweiser Konvergenz**

Seien $f_i\colon X \to Y$ messbar, Y ein metrischer Raum und $f(x) = \lim_{i\to\infty} f_i(x)$ für alle $x \in X$, dann ist auch f messbar.

38 **Satz: fast gleichmäßige Konvergenz**

Sei $E \subseteq X$ messbar mit $\mu(E) < \infty$ und $f_k\colon E \to \mathbb{R}$ messbar mit $\forall x \in \mathbb{R}\colon f(x) = \lim_{n\to\infty} f_k(x)$. Dann existieren für alle Paare $\delta, \varepsilon > 0$ ein messbares $A \subseteq E$ und ein k_0 so, dass $\mu(A) < \delta$ sowie $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ für $x \in E \setminus A$ und $k \geq k_0$.

Beweis (38) Wir betrachten die Mengen

$$G_k := \left\{ x \in E \;\middle|\; |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon \right\}$$
$$E_m := \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = \left\{ x \in E \;\middle|\; \exists k \geq m\colon |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon \right\}$$

Offensichtlich ist E_m eine monotone Folge $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots$. Dann ist

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} E_m = \left\{ x \in E \;\middle|\; \forall!\, k\colon |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon \right\} = \emptyset$$

wegen der Punktweisen Konvergenz. Somit ist $\lim_{m\to\infty} \mu(E_m) = \mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} E_m\right) = \mu(\emptyset) = 0$.

$$\Rightarrow \exists m\colon A = E_m, \mu(A) < \delta$$
$$x \in E \setminus A \Rightarrow \forall k \geq m\colon |f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

1.4 Integration messbarer Funktionen

Einfache Funktionen sind Verallgemeinerungen von Treppenfunktionen sodass man sinnvollerweise das Riemannintegral in $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ verallgemeinern zu

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{1}_{A_k}$$

$$\int_E \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(A_k \cap E)$$

39 **Satz: Eigenschaften des Integrales für einfache φ**

() Es ist unabhängig von der Wahl des Repräsentanten von φ (*Eindeutigkeit*).

(i) $\int_E (\alpha\varphi + \beta\psi) d\mu = \alpha \int_E \varphi d\mu + \beta \int_E \psi d\mu$ (*Linearität*)

(ii) $E_1 \cap E_2 = \varnothing \Rightarrow \int_{E_1 \cup E_2} \varphi d\mu = \int_{E_1} \varphi d\mu + \int_{E_2} \psi d\mu$ (*Mengenadditivität*)

(iii) $\varphi(x) \leq \psi(x) \Rightarrow \int_E \varphi d\mu \leq \int_E \psi d\mu$ (*Monotonie*)

(iv) $|\int_E \varphi d\mu| \leq \int_E |\varphi| d\mu \leq \mu(E) \|\varphi\|_\infty$

Ziel Wir wollen das Integral so auf möglichst alle messbaren Funktionen erweitern, dass die obigen Eigenschaften erhalten bleiben. Abgesehen von unendlichen Werten soll die Messbarkeit hinreichend und notwendig für die Integrierbarkeit sein.

40 **Satz:**

Sei $E \subseteq X$ messbar und $f : E \to \mathbb{R}$ eine auf E durch M beschränkte Funktion. Dann gilt mit einfachen Funktionen φ und ψ:

$$\sup_{\varphi \leq f} \int_E \varphi d\mu = \inf_{\psi \geq f} \int_E \psi d\mu$$

genau dann, wenn f messbar ist.

Beweis (40) Angenommen f ist messbar. Für ein beliebiges aber festes m betrachten wir nun die folgenden Niveaumengen

$$E_k := \left\{ x \in E \;\middle|\; \frac{(k-1)M}{m} < f(x) \leq \frac{k}{m} M \right\}, \quad k = -m, 1-m, \cdots, m-1, m$$

Dafür definieren wir dann

$$\left.\begin{aligned}\varphi_m(x) &:= \sum_{k=-m}^{m} \frac{(k-1)M}{m} \mathbf{1}_{E_k}(x)\\ \psi_m(x) &:= \sum_{k=-m}^{m} \frac{kM}{m} \mathbf{1}_{E_k}(x)\end{aligned}\right. \Rightarrow \forall x \in E\colon \varphi_m(x) \leq f(x) \leq \psi_m(x)$$

$$\int_E \varphi_m d\mu = \sum_{k=-m}^{m} \frac{(k-1)M}{m} \mu(E_k) \leq \int_E \psi_m d\mu = \sum_{k=-m}^{m} \frac{kM}{m} \mu(E_k)$$

$$\int_E \psi_m d\mu - \int_E \varphi_m d\mu = \int_E (\psi_m - \varphi_m) d\mu = \sum_{k=-m}^{k=m} \frac{kM}{m} - \frac{(k-1)M}{m} \mu(E_k)$$

$$= \sum_{k=-m}^{m} \frac{M}{m} \mu(E_k) = \frac{M}{m} \sum_{k=-m}^{m} \mu(E_k) = \frac{M}{m} \mu(E)$$

$$\inf_{\psi \geq f} \int_E \psi d\mu - \sup_{\varphi \leq f} \int_E \varphi d\mu \leq \inf_{\psi_m \geq f} \int_E \psi_m d\mu - \sup_{\varphi_m \leq f} \int_E \varphi_m d\mu$$

$$\Rightarrow \inf_{\psi \geq f} \int_E \psi d\mu - \sup_{\varphi \leq f} \int_E \varphi d\mu \leq \inf_{m \in \mathbb{N}} \int_E (\psi_m - \varphi_m) d\mu = \inf_{m \in \mathbb{N}} \frac{M}{m} \mu(E) = 0$$

Mit der Monotonie des Integrals über einfachen Funktionen gilt dann die behauptete Gleichheit.

Umgekehrt seien $\varphi_n \leq f$ und $\psi_n \geq f$ beliebige Folgen einfacher Funktionen für die gilt

$$\lim_{n \to \infty} \int_E \varphi_n d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_E \psi_n d\mu$$

Diese müssen nach Voraussetzung existieren. Daraus folgt

$$\int_E \psi_n d\mu - \int_E \varphi_n d\mu \leq \int_E (\psi_n - \varphi_n) d\mu \to 0$$

Dann sei $\varphi_* := \sup \varphi_n$ und $\psi_* := \inf \psi_n$. Dafür gilt Punktweise $\varphi_*(x) \leq f(x) \leq \psi_*(x)$ und φ_* sowie ψ_* sind messbar.
Angenommen $\mu(\{ x \in E \mid \psi_*(x) > \varphi_*(x) \}) > 0$, dann folgt für ein $\varepsilon > 0$ auch

$$\mu(A_\varepsilon) := \mu(\{ x \in \mid \psi_*(x) > \varphi_*(x) + \varepsilon \}) > 0$$
$$\Rightarrow \mu(\{ x \in E \mid \psi_n(x) > \varphi_n(x) + \varepsilon \}) =: \varepsilon_n > 0$$
$$\int_E (\psi_n - \varphi_n) d\mu \geq \int_{A_\varepsilon} (\psi_n - \varphi_n) d\mu \geq \int_{A_\varepsilon} \varepsilon d\mu = \varepsilon \mu(A_\varepsilon) > 0$$

Da dies für alle n gilt widerspricht dies der Voraussetzung, dass $\int_E (\psi - \varphi) d\mu \to 0$ gilt. Also gilt $\mu(\{ x \in E \mid \varphi_*(x) < \psi_*(x) \}) = 0$.

$$\Rightarrow \int_E (\varphi_* d\mu) = \int_E \psi_* d\mu \Rightarrow \mu(\{ x \in E \mid f(x) \neq \varphi_*(x) \}) = 0$$

Das heißt wegen der Vollständigkeit von μ ist f messbar.

41 **Definition: „Integral, Lebesgue-Integral“**

Falls $E \subseteq X$ und f messbar mit f beschränkt ist, so setzen wir

$$\int_E f d\mu := \inf_{\substack{\psi \geq f \\ \psi \text{ einfach}}} \int_E \psi d\mu$$

Falls $\mu = \lambda_n$ das Lebesguemaß ist, spricht man vom Lebesgue-Integral und schreibt einfach

$$\int_E f d\mu =: \int_E f(x) dx$$

42 **Korollar:**

Falls $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann-integrierbar ist, dann ist f messbar und das Lebesgue-Integral stimmt mit dem Riemann-Integral überein.

Beweis (42) Die bei der Definition des Riemann-Integralls verwendeten Unter- und Obersummen sind Integrale über einfache Funktionen. Ihre Übereinstimmung impliziert sofort die Übereinstimmung des obigen Supremums mit dem Infinimum, also Messbarkeit.

Beispiel Es ist jedoch nicht jede Lebesgue-integrierbare Funktion auch Riemann-integrierbar. Z.B. ist mit $\tilde{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q} \cap [0,1]$ die Funktion $\mathbf{1}_{\tilde{\mathbb{Q}}}$ nicht Riemann-integrierbar, da das obere Integral immer 1 und das untere immer 0 ist. Allerdings ist $\mathbf{1}_{\tilde{\mathbb{Q}}}$ als einfache Funktion Lebesgue-messbar bzw. -integrierbar.

43 **Definition: „Lebesgue-Integral unbeschränkter Funktionen“**

Falls $f\colon X \to [0,\infty]$ und $E \subseteq X$ messbar sind, setzen wir

$$\int_E f d\mu = \sup \left\{ \int_E \varphi d\mu \;\middle|\; 0 \leq \varphi \leq f, \varphi \text{ einfach} \right\}$$

44 **Lemma: Eigenschaften des allgemeinen Lebesgue-Integrals**

Das obige Integral erfüllt die Eigenschaften (ii), (iv) aus Satz 39 (Eigenschaften des Integrales für einfache φ) sowie $\int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu$ falls $\alpha \geq 0$.

45 **Satz: Lemma von Fatou**

Eine nicht-negative Folge von messbaren Funktion f_n konvergiere Punktweise gegen f und sei $E \subseteq X$ messbar. Dann gilt

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \geq \int_E f d\mu$$

Beweis (45) Es reicht zu zeigen, dass die Ungleichung für ein beliebiges einfaches φ gilt.

Ist $\int_E \varphi d\mu = \infty$, so gilt

$$A = E \setminus \varphi^{-1}(0) \Rightarrow \varphi(A) = \infty, \quad x \in A \Rightarrow \varphi(x) > a > 0$$

$$A_n := \left\{ x \in E \,\middle|\, \forall k \geq n\colon f_k(x) > a \right\}, \quad A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \geq \mu(A) = \infty, \quad A_n \subseteq A_{n+1}$$

$$\int_E f_n d\mu \geq a\mu(A_n) \to \infty$$

Im anderen Fall, $0 \leq \int_E \varphi d\mu < \infty$, wählen wir ein $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann definieren wir

$$A_n := \left\{ x \in E \,\middle|\, \forall k \geq n\colon f_k(x) > (1-\varepsilon)\varphi(x) \right\}$$

$$A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \cdots \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supseteq A, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A \setminus A_n = \emptyset$$

$$\mu(A \setminus A_n) \to 0$$

Das heißt für ein bestimmtes n_0 gilt $n \geq n_0 \Rightarrow \mu(A \setminus A_n) < \varepsilon$. Mit $\varphi(x) \leq M$ für $x \in E$:

$$\int_E f_n d\mu \geq \int_{A_n} f_n d\mu \geq (1-\varepsilon) \int_{A_n} \varphi d\mu$$
$$= (1-\varepsilon) \int_A \varphi d\mu - \int_{A \setminus A_n} \varphi d\mu \geq (1-\varepsilon) \int_E \varphi d\mu - \varepsilon M$$

Also gilt

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \geq (1-\varepsilon) \int_E \varphi d\mu - \varepsilon M$$

für $\varepsilon \to 0$ ergibt sich genau die Behauptung.

46 **Korollar: Monotone Konvergenz**

Sei f_n eine folge messbarer Funktionen mit $0 \leq f_n \leq f$ auf E messbar die punktweise gegen f konvergiert. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

Beweis (46) Aus der Monotonie des Integrals und dem Lemma von Fatou folgt

$$\int_E f d\mu \geq \int_E f_n d\mu \geq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \geq \int_E f d\mu$$

47 **Lemma: Linearität des Integrals für nicht-negative Funktionen**

Sind f und g nichtnegative messbare Funktionen, so gilt

$$\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu$$

Beweis (47) Nach Satz 36 (einfache Annäherbarkeit von messbaren Funktionen) gibt es einfache Funktionen $\varphi_n \nearrow f$ und $\psi_n \nearrow g$. O.B.d.A. seien diese einfachen Funktionen nicht-negativ. Also gilt folgende konvergenz von unten

$$\lim_{n\to\infty} \alpha\varphi_n(x) + \beta\psi_n(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

Mit monotoner Konvergenzaussage gilt also

$$\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E (\alpha\varphi_n + \beta\psi_n) d\mu$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_E \alpha\varphi_n d\mu + \beta \int_E \psi_n d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu$$

48 **Korollar: Vertauschung von Reihen und Integralen**

Ist $f_n \geq 0$, E messbar, so gilt

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu$$

49 **Definition: „Integrablität“**

(i) $f\colon X \to [0,\infty]$ heißt *integrabel* auf $E \subseteq X$, falls

$$\int_E f d\mu < \infty$$

(ii) $f\colon X \to [-\infty,\infty]$ heißt *integrabel*, wenn sowohl $f^+(x) = \max(0, f(x))$ als auch $f^-(x) = \max(0, -f(x))$ integrabel sind. Man setzt dann

$$\int_E f d\mu := \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

50 **Lemma: Linearität**

Falls f, g auf E integrabel und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind, so gilt

(i)

$$\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu$$

(ii) für messbare h folgt aus $|h| \leq g$, dass auch h integrabel ist mit

$$|\int_E h d\mu| \leq \int_E |h| d\mu \leq \int_E g d\mu < \infty$$

51 **Satz: Satz von Lebesgue über beschränkte Konvergenz**

Falls f_n auf E punktweise gegen f konvergiert und $|f_n(x)| \leq g(x)$ in E gilt, so folgt aus der Integrabilität von g die von f und es gilt

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

Beweis (51) Wir betrachten die beiden nicht-negativen Funktionen

$$0 \leq g + f_n \to g + f$$
$$0 \leq g - f_n \to g - f$$

Nach Fatou ist dann

$$\int_E g d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_E \pm f_n d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_E (g \pm f_n) d\mu \geq \int_E (g \pm f) d\mu = \int_E g d\mu \pm \int_E f d\mu$$
$$\liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \geq \int_E f d\mu$$
$$\liminf_{n\to\infty} \int_E -f_n d\mu = -\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \geq -\int_E f d\mu$$
$$\int_E f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$$

1.5 Produktmaße und Integration

Ziel ist die Definition und Auswertung von Maßen und Integralen in $\mathbb{R}^n$ durch geschachtelte Integration in $\mathbb{R}$.

Voraussetzung Durchgängig gehen wir von zwei σ-endlichen Maßräumen $(X, A_\sigma, \mu), (Y, B_\sigma, \nu)$ und ihrem kartesischen Produkt $Z := X \times Y = \{ (x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y \}$ aus. Für einfache Teilmengen von Z (Rechtecken) $A \times B$ mit $A \in A_\sigma$, $B \in B_\sigma$ definieren wir den Produktinhalt $\lambda = \mu \times \nu$

$$\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

Die Aufgabe ist dann λ eindeutig von $(A_\sigma \times B_\sigma)$ auf die von $(A_\sigma \times B_\sigma$ erzeugte σ-Algebra zu erweitern.

52 **Definition und Satz: „Figuren, Produktmaß“**

Die Menge $C_0 := \left\{ \bigcup_{i=1}^m (A_i \times B_i) \,\middle|\, \forall i = 1, \cdots, m: A_i \in A_\sigma \wedge B_i \in B_\sigma \right\}$ bildet eine Algebra, wobei o.B.d.A. paarweise Disjunktheit der $(A_i \times B_i)$ angenommen werden kann. Dann ist für $E = \bigcup_{i=1}^m E_i \in C_0$ mit $E_i := A_i \times B_i$ durch

$$\lambda(E) = \sum_{i=1}^m \mu(A_i)\nu(B_i)$$

ein σ-endlicher und σ-additiver Inhalt definiert. λ heißt das *Produktmaß* und wird mit $\lambda = \mu \times \nu$ bezeichnet.

53 **Korollar: Maß**

Der Inhalt $\lambda = \mu \times \nu$ lässt sich eindeutig zu einem Maß λ auf die von C_0 erzeugte σ-Algebra C_σ erweitern.

Beweis (Definition und Satz 52 (Figuren, Produktmaß)) Schnittbildung: $E = A \times B$, $\tilde{E} = \tilde{A} \times \tilde{B}$
$E \cap \tilde{E} = (A \cap \tilde{A}) \times (B \cap \tilde{B}) \in C_0$
Entsprechend für endliche Vereinigungen $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$
$\tilde{E} = \bigcup_{j=0}^{m} \tilde{E}_j \Rightarrow E \cap \tilde{E} = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (E_i \cap \tilde{E}_j) \in C_0$.
$E \setminus \tilde{E} = (B \setminus \tilde{B}) \times (A \setminus \tilde{A}) \cup (A \cap \tilde{A}) \times (B \setminus \tilde{B}) \cup (B \cap \tilde{B}) \times (A \setminus \tilde{A}) \in C_0$.
$E \cup \tilde{E} = (E \setminus \tilde{E}) \cup \tilde{E}$ ist eine disjunkte Zerlegung in C_0. Außerdem ist:
$\bar{E} = Z \setminus E = (X \times Y) \setminus E \in C_0$
Somit haben wir gezeigt, dass C_0 eine Algebra ist. Die σ-Endlichkeit folgt aus der vorausgesetzten σ-Endlichkeit von μ und ν. Ist $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = X$ mit $\mu(X_i) < \infty$ und $\bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i = Y$ mit $\nu(Y_i) < \infty$ und o.B.d.A. $X_i \subseteq X_{i+1}$ sowie $Y_i \subseteq Y_{i+1}$, dann gilt für $Z_i = X_i \times Y_i$: $\bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i = Z$ und $\lambda(Z_i) = \mu(X_i)\nu(Y_i) < \infty$.

54 **Definition und Satz: „Schnitte“**

Falls $E \in C_\sigma$ dann sind die *Schnitte*

$$E_x := \{\, z \mid (x, z) \in E \,\} \subseteq Y$$
$$E_y := \{\, z \mid (z, y) \in E \,\} \subseteq X$$

B_σ bzw. A_σ messbar.

Beweis (54) Sei $S \subseteq C_\sigma$ die Menge der E für die die Behauptung wahr ist. Nun reicht es zu zeigen, dass $C_0 \subseteq S$ ist und S eine bezüglich abzählbarer Vereinigung abgeschlossen Algebra ist.

$$E \in C_0 \Rightarrow E = \bigcup_{i=1}^{m} E_i, E_i = A_i \times B_i$$

$$E_x = \{\, z \in Y \mid (x, z) \in E \,\} = \left\{\, z \in Y \,\middle|\, \exists i: (x, z) \in E_i \,\right\} = \left\{\, z \in Y \,\middle|\, \exists i: z \in (E_i)_x \,\right\} = \bigcup_{i=1}^{m} (E_i)_x$$

$$(E_i)_x = \left\{\, z \,\middle|\, (x, z) \in E_i \,\right\} = \left\{\, z \,\middle|\, x \in A_i \wedge z \in B_i \,\right\} = \begin{cases} \emptyset, & x \notin A_i \\ B_i, & x \in A_i \end{cases}$$

$$E_x = \bigcup_{x \in A_i} B_i \subseteq B_\sigma$$

Aufgrund der Symmetrie gilt dann auch $E_y \subseteq A_\sigma$.

Sei nun $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ dann gilt

$$E_x = \left\{ z \in Y \;\middle|\; \exists i \colon (x,z) \in E_i \right\} = \left\{ z \in Y \;\middle|\; \exists i \colon z \in (E_i)_x \right\}$$
$$= \bigcup_{i=1}^{\infty} \left\{ z \in Y \;\middle|\; z \in (E_i)_x \right\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i)_x$$

Damit ist also $E_x \in B_\sigma$ da dieses System eine σ-Algebra ist. Entsprechend gilt $E_y \subseteq A_\sigma$, also $E \subseteq S$.

Weiter ist

$$E \in S \Rightarrow (Z \backslash E)_x = \{ z \in Y \mid (x,z) \in Z \setminus E \} = \{ z \in Y \mid (x,z) \notin E \} = \left\{ z \in Y \;\middle|\; z \notin E_x \right\} = Y \backslash E_x$$

Somit ist S eine σ-Algebra.

55 **Satz:**

Für $E \in C_\sigma$ gilt:
$x \mapsto \nu(E_x)$ ist eine A_σ-messbare Funktion und
$y \mapsto \nu(E_y)$ ist eine B_σ-messbare Funktion sowie

$$\int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E_y) d\nu(y)$$

Beweis (55) Sei $S \subseteq C_\sigma$ die Menge der $E \in C_\sigma$ für die die Behauptung gilt. Wir zeigen zuerst, dass $C_0 \subseteq S$ gilt:

Betrachte $E \in C_0$ mit $E = \bigsqcup_{i=1}^{m} \underbrace{A_i \times B_i}_{E_i}$. Dann ist (wie oben)

$$E_x = \bigcup_{i=1}^{m} (E_i)_x = \bigcup_{x \in A_i} B_i$$
$$\nu(E_x) = \sum_{i, x \in A_i} \nu(B_i) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{1}_{A_i}(x) \nu(B_i)$$

unter der Annahme das auch die B_i auch disjunkt sind. Dies ist eine einfache Funktion und deshalb auch messbar. Entsprechendes gilt für E_y:

$$\mu(E_y) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{1}_{B_i}(y) \mu(A_i)$$

Integration ergibt unmittelbar

$$\int_X \nu(E_x) d\mu = \sum_{i=1}^{m} \nu(B_i) \int_X \mathbf{1}_{A_i}(x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^{m} \nu(B_i) \mu(A_i) = \int_Y \mu(E_y) d\nu(y)$$

Betrachte nun $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ mit $E_i \in S$. O.B.d.A. sei $E_i \subseteq E_{i+1}$ monoton steigend in $X \times Y$. Dann sind die Schnitte $(E_i)_x \subseteq (E_{i+1})_x$ ebenenfalls Monoton steigend in Y. Dann ist $\nu(E_x) = \lim_{i\to\infty} \nu((E_i)_x)$ wegen Stetigkeit von unten des Maßes. Die $\nu((E_i)_x)$ bilden eine monoton steigende Folge nicht negativer, messbarer Funktionen. Also ist nach dem Korrolar über monotone Konvergenz (Korollar 46 (Monotone Konvergenz)) ist dann auch $\nu(E_x)$ als Funktion von x messbar und es gilt

$$\int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \lim_{i\to\infty} \int_X \nu((E_i)_x) d\mu(x)$$

Entsrechend gilt symmetrisch

$$\int_Y \nu(E_y) d\mu(y) = \lim_{i\to\infty} \int_Y \nu((E_i)_y) d\mu(y)$$

Die beiden Grenzwerte sind aber gleich, da $E_i \in S$ ist.

Um Abschluss bezüglich Schnitten zu zeigen betrachten wir die absteigende Folge $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots$.

1.Fall Sei $E_n \subseteq A \times B$ mit $\mu(A)$ und $\nu(B)$ endlich. Wegen der Stetigkeit von oben gilt dann für $E := \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$, dass $\nu(E_x) = \lim_{i\to\infty} \nu((E_i)_x)$ mit $\nu((E_i)_x) < \nu(E_i) < \infty$. Also haben die $\nu((E_i)_x)$ die messbaren Grenzfunktionen $\nu(E_x)$ und es gilt wiederum

$$\int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \lim_{i\to\infty} \int_X \nu((E_i)_x) d\mu(x) = \lim_{i\to\infty} \int_Y \nu((E_i)_y) d\mu(y) = \int_Y \nu(E_y) d\mu(y)$$

2.Fall Es ist σ-Endlichkeit vorausgesetzt:

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i, X_i \subseteq X_{i+1}, \quad Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i, Y_i \subseteq Y_{i+1}$$
$$\forall i\colon \mu(X_i) < \infty, \nu(Y_i) < \infty$$
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} (X_i \times Y_i) = X \times Y$$

$E_i = E \cap (X_i \times Y_i)$ erfüllen sicherlich die Behauptung des 1.Falls. Dann gilt

$$\int_X \nu((E_i)_x) d\mu(x) = \int_Y \mu((E_i)_y) d\nu(y)$$
$$\xrightarrow{i\to\infty} \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E_x) d\nu(x)$$

da die $\nu((E_i)_x)$ eine monoton steigende Folge nichtnegative Funktionen bilden und deshalb gegen eine messbare Funktion $\nu(E_x)\colon X \to [0,\infty]$ konvergieren, dessen Integral der Grenzwert der Monotonen Folge $\int_X \nu((E_i)_x) d\mu(x)$ ist.

Damit haben wir den Abschluss bezüglich abzählbarer Vereinigungen und Schnitte gezeigt. Wir sind außerdem von der Algebra C_0 ausgegangen. Deshalb ist S eine σ-Algebra. Also $S = C_\sigma$.

56 **Korollar:**

Unter den obigen Voraussetzungen wird durch

$$\lambda(E) := \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E_y) d\nu(y)$$

ein Maß definiert, dass gerade die (wegen σ-Endlichkeit) eindeutige Erweiterung des Inhaltes $\lambda = \mu \times \nu$ auf C_0 darstellt.

57 **Satz: Fubini**

Es sind zwei Maßräume $(X, A_\sigma, \mu), (Y, B_\sigma, \nu)$ mit σ-endlichen Maßen gegeben und eine C_σ-messbare Abbildung $f : X \times Y \to [0, \infty]$. Dann ist

$$x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y) \quad A_\sigma\text{-messbar}$$
$$y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(y) \quad B_\sigma\text{-messbar}$$

und es gilt für die Integrale

$$\int_{X\times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu) = \int_X \int_Y f(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x, y) d\mu(x) d\nu(y)$$

Beweis (57) Zunächst betrachte $f = \mathbf{1}_E$ mit $E \subseteq X \times Y$:

$$\int_Y f(x, y) d\nu(y) = \int_Y \mathbf{1}_E d\nu(y) = \int_Y \mathbf{1}_{E_x} d\nu(y) = \nu(E_x)$$

Dies ist als messbar bekannt. Analog folgt die Messbarkeit für $\int_X f(x, y) d\mu(y) = \mu(E_y)$ und die vertauschung der Integrale folgt wegen $\int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E_y) d\nu(y)$ (Satz 55). Dann gilt die Behauptung auch unmittelbar für einfache Funktionen, da diese linearkombinationen von charakteristischen Funktionen sind.

Beliebige messbare $f \geq 0$ sind nun Grenzwerte monoton steigende Folgen einfacher Funktionen $f_i(x, y)$. Dann sind wegen der Monotonie des Integrals auch die beiden Funktionenfolgen $\int_Y f_i(x, y) d\nu(y)$ und $\int_X f_i(x, y) d\mu(x)$ monoton steigend und es gilt nach Korollar 46 (Monotone Konvergenz)

$$\lim_{i\to\infty} \int_Y f_i(x, y) d\nu(y) = \int_Y \lim_{i\to\infty} f_i(x, y) d\nu(y)$$

Da die Behauptung für jedes einfache f_i bereits erwiesen wurde gilt weiter ebenfalls nach (Korollar 46 (Monotone Konvergenz)):

$$\int_X \int_Y f_i(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = \int_Y \int_X f_i(x, y) d\mu(x) d\nu(y)$$
$$\xrightarrow{i\to\infty} \int_X \int_Y f(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x, y) d\mu(x) d\nu(x)$$

58 **Korollar: weitere Aussage**

Ist f in Satz 57 (Fubini) nicht messbar sondern integrierbar, so ist $x \mapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ μ-integrierbar für fast alle x und symmetrisch $y \mapsto \int_X f(x,y)d\mu(x)$ ν-integrierbar.

Beweis (58) Wegen der Integrierbarkeit sind $\int_{X\times Y} f^+ d(\mu\times\nu)$ und $\int_{X\times Y} f^- d(\mu\times\nu)$ endlich. Für f^+ und f^- gilt jeweils Satz 57 (Fubini):

$$\int_{X\times Y} f^\pm d(\mu\times\nu) = \int_X \underbrace{\int_Y f^\pm(x,y)d\nu(y)d\mu(x)}_{=:g^\pm(x)}$$

Dabei ist $g^\pm$ eine nicht-negative Funktion von x mit endlichem Integral bezüglich μ. Sie kann also nur auf einer μ-Nullmenge unendlich sein (analog für $\int_X f^\pm(x,y)d\mu(x)$) und es folgt

$$\int_{X\times Y} fd(\mu\times\nu) = \int_{X\times Y} f^+ d(\mu\times\nu) - \int_{X\times Y} f^-(x,y)d(\mu\times\nu)$$
$$= \iint\limits_{XY} f^+(x,y)d\nu(y)d\mu(x) - \iint\limits_{XY} f^-(x,y)d\nu(x)d\mu(x)$$
$$= \int_X \left(\int_Y f^+(x,y)d\nu(y) - \int_Y f^-(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x)$$
$$= \iint\limits_{XY} f^+(x,y) - f^-(x,y)d\nu(y)d\mu(x) = \iint\limits_{XY} f(x,y)d\nu(y)d\mu(x)$$

Wobei sich die andere Integralreihenfolge symmetrisch ergibt.

Beispiel Wir betrachten $f(x,y) := xe^{x+y}$ auf $[0,1]^2$ mit dem Lebesguemaß:

$$\iint\limits_{[0,1]^2} xe^{x+y}dydx = \int_0^1 \left(\left[xe^{x+y}\right]_0^1 - \int_0^1 e^{x+y}dx\right) dy$$
$$= \int_0^1 \left[e^{1+y} - 0 - e^{x+y}\right]_0^1 dy = \int_0^1 e^y dy = e-1$$
$$\iint\limits_{[0,1]^2} xe^{x+y}dydx = \int_0^1 \left[xe^{x+y}\right]_0^1 dx = \int_0^1 x(e-1)e^x dx$$
$$= (e-1)\left(\left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx\right) = e-1$$

ein weiters Beispiel:

$$\int_0^1 \int_0^\pi x\cos(xy)dydx = \int_0^1 [\sin(xy)]_0^\pi \, dx = \int_0^1 \sin(\pi x)dx = \left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}$$

$$\int_0^\pi \int_0^1 \cos(xy)dxdy = \int_0^\pi (\left[\frac{x}{y}\sin(xy)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{y}\sin(xy)dx)dy = \int_0^\pi \frac{\sin y}{y} + \left[\frac{\cos(xy)}{y^2}\right]_0^1 dy$$

$$= \int_0^\pi \left(\frac{\sin y}{y} + \frac{\cos y - 1}{y^2}\right) dy$$

„Gegenbeispiel"

$$f(x,y) := \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\underbrace{\arctan(\frac{x}{y})}_{=:\varphi}$$

diese Fuktion ist auf $[0,1]^2$ nicht vollständig nicht-negativ und auch nicht integrierbar. Somit ist es nicht verwunderlich, dass die Behauptung von (Satz 57 (Fubini)) nicht zutrifft. Zuersteinmal kommutieren die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{(1+\frac{x^2}{y^2})y} = \frac{y}{y^2+x^2} \xrightarrow{\partial y} f(x,y)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{-x}{(1+\frac{x^2}{y^2})y^2} = \frac{-x}{x^2+y^2} \xrightarrow{\partial x} f(x,y)$$

Betrachten wir nun die Integrale:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy = \int_0^1 \left[\frac{-x}{x^2+y^2}\right]_0^1 dy = \int_0^1 \frac{-1}{1+y^2}dy = [-\arctan y]_0^1 = -\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dydx = \int_0^1 \left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_0^1 dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Problem Wir wollen nun den Satz von Fubini auf $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ mit dem Lebesguemaß anwenden. Dann ist $C_\sigma = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)) \neq \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$, da C nicht vollständig sein muss. Genauer gilt:

(i) $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$

(ii) $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$

(iii) $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)) \neq \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$. Denn betrachte man beispielsweise $E = \{p\} \times B$ mit $p \in \mathbb{R}^n$ und $B \subseteq \mathbb{R}^m$ nicht λ_m-messbar. Dann ist E eine Nullmenge in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$ jedoch ist E_p nicht messbar.

(iv) $\lambda_{n+m}|_{\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{L}(\mathbb{R}^m))} = \lambda_n \times \lambda_m$

(v) Die Vervollständigung ergibt jedoch $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$.

59 **Korollar: Charakterisierung von Nullmengen**

Sei $E \in C$. Dann gilt $\lambda(E) = 0$ gdw. $\mu(E_y) = 0$ für $y \in Y$ ν-fast-überall. Bzw. $\nu(E_x) = 0$ für $x \in X$ μ-fast-überall.

Beweis (59) Es ist $x \mapsto \nu(E_x) \geq 0$ μ-messbar und für $A \subseteq X$ messbar gilt:

$$0 \leq \int_A \nu(E_x) d\mu(x) \leq \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \lambda(E) = 0$$

nach (Korollar 56). Wegen dem Ergebnis von Übung **5.1b** ist dann $\nu(E_x) = 0$ μ-fast-überall. Damit gilt die Hinrichtung. Umgekehrt ist $\lambda(E) = \int_x \nu(E_x) d\mu(x) = 0$.

60 **Satz:**

Seien $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ vollständige Maßräume. Sowie $C = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$. Wenn $E \in C$ eine $\mu \times \nu$-Nullmenge ist und $F \subseteq E$, dann gilt $\mu(F_y) = 0$ ν-fast-überall und $\nu(F_x) = 0$ μ-fast-überall.

Beweis (60) Für die Fasern gilt ebenfalls $F_x \subseteq E_x$. Nach (Korollar 59 (Charakterisierung von Nullmengen)) gibt es ein $X_0 \subseteq X$ messbar mit $\mu(X \setminus X_0) = 0$ mit $\forall x \in X_0$: $\mu(E_x) = 0$. Nach der Definition der Vollständigkeit ist für $x \in X_0$ auch F_x messbar und $\nu(F_x) = 0$. Analog für $\mu(F_y)$.

61 **Satz: Satz von Fubini für vollständige Maße**

Seien $(x, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ vollständige Maßräume mit $C = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$, $\lambda = \mu \times \nu$ und $\bar{C}$ die Vervollständigung von C bezüglich λ.

(i) Ist $f: X \times Y \to [0, \infty]$ $\bar{C}$-messbar, dann gilt

a) $x \mapsto f(x, y)$ ist ν-fast-überall $\mathcal{A}$-messbar.
$y \mapsto f(x, y)$ ist μ-fast-überall $\mathcal{B}$-messbar.

b) $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ ist ν-fast-überall $\mathcal{A}$-messbar.
$y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ ist μ-fast-überall $\mathcal{B}$-messbar.

c)

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d\lambda(x, y) = \int_X \int_Y f(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x, y) d\mu(x) d\nu(y)$$

(ii) Für $f: X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ $\bar{C}$-integrierbar analog.

62 **Korollar: Fubini für Lebesgue-integrierbare Funktionen**

Sind $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ Lebesguemessbare Mengen und $f: A \times B \to \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue-integrierbar bzw. nicht-negativ und messbar. Dann gilt

$$\int_{A \times B} f d\lambda_{n+m} = \int_A \int_B f d\lambda_m d\lambda_n = \int_B \int_A f d\lambda_n d\lambda_m$$

Ist $f = gh$ mit messbaren Funktionen $g\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$, $h\colon B \to \overline{\mathbb{R}}$ so gilt

$$\int_{A\times B} f d\lambda_{n+m} = (\int_A g d\lambda_n)(\int_B h d\lambda_m)$$

63 **Korollar: Integration über nicht-rechteckige Mengen**
Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesguemessbar und $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$, dann gilt

$$\int_E f d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_E f d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^1}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\mathbf{1}_E f)(x_1, \cdots, x_n) d\lambda_{n-1}(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n) dx_i$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{E_{x_i}} f d\lambda_{n-1} dx_i$$

64 **Korollar: Prinzip von Cavalieri**
Für ein beliebiges $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\lambda_n(E) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(E_{x_i}) d\lambda(x_i) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \lambda_1(E_y) d\lambda_{n-1}(y)$$

Beispiel Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n$, $f\colon A \to [0, \infty]$ Lebesgue-messbar. Dann betrachten wir das Volumen

$$V_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; x \in A, y \in [0, f(x)] \right\}$$

unter dem Graphen von f. Dann gilt

$$\lambda_{n-1}(V_f) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_1(V_f) d\lambda_n(x) = \int_A f(x) d\lambda_n(x)$$

Denn für den Schnitt gilt: $(V_f)_x = \{ y \mid y \in [0, f(x)] \}$.

Beispiel 2 Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}^+$ Lebesgue-integrierbar. Dann betrachten wir den Rotationskörper K des Graphen von f um die x-Achse. Dann gilt

$$\lambda_3(K) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_n(K_x) d\lambda_1(x) \overset{!}{=} \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

denn die K_x sind Kreisscheiben mit Radius $f(x)$.

1.6 Transformationsformel für das Lebesgue-Integral

Wir wollen die Transformationsformel (Substitution) für das Riemann-Integral:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) dx$$

auf das Lebesgue-Integral übertragen. (φ ist ein C^1-Diffeomorphismus auf $[a, b]$ und f stetig auf dem Bild von φ.)

65 **Satz: Maßtransformation**
Sei $\varphi\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Diffeomorphismus, so gilt

$$\forall A \in \mathcal{L}(U)\colon \varphi(A) \in \mathcal{L} \wedge \lambda_n(\varphi(A)) = \int_A |\det \nabla\varphi| d\lambda_n$$

66 **Korollar: Transformationsformel**
Sei $\varphi\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Diffeomorphismus, so gilt

$$\forall A \in \mathcal{L}(U), f \in \mathcal{L}^1(\varphi(A), \overline{\mathbb{R}})\colon f \circ \varphi \in \mathcal{L} \wedge \int_{\varphi(A)} f d\lambda_n = \int_A (f \circ \varphi)|\det \nabla\varphi| d\lambda_n$$

Beweis (Satz 65 (Maßtransformation)) Die Messbarkeit von $\varphi(A)$ folgt aus der Abgeschlossenheit von φ.

(i) Wir brauchen die Gleichheit nur lokal zeigen, da die linke und rechte Seite jeweils Maße sind, also σ-additiv und jedes A in beliebig kleine, abzählbar viele disjukte Teilmengen zerlegt werden können.

(ii) Für $n \geq 2$ reicht es die lokale Eigenschaft nur für solche φ zu zeigen, für die φ in einer Koordinate identisch ist, denn

a) Sind $\varphi_1\colon U_1 \to U_2$ und $\varphi_2\colon U_2 \to U_3$ C^1-Diffeomorphismen die die Gleichheit erfüllen, dann erfüllt auch die Komposition $\varphi_2 \circ \varphi_1$ die Gleichheit. Wir wenden dazu die Gleichheit von φ_2 und die Transformationsformel für φ_2 an (Das heißt wir verwenden die Aussage, dass die Transformationsformel aus Satz 65 (Maßtransformation) folgt!):

$$\lambda_n(\varphi_2(\varphi_1(U_1))) = \int_{\varphi_1(U_1)} |\det \nabla\varphi_2| d\lambda_n = \int_{U_1} \underbrace{|\det \nabla\varphi_2 \circ \varphi_1 |\det \nabla\varphi_1||}_{|\det \nabla(\varphi_2 \circ \varphi_1)|} d\lambda_n$$

b) Sei T_{ij} die Vertauschung der i-ten und j-ten Koordinate. Gilt für $T_{ij} \circ \varphi \circ T_{kl}$ die Behauptung, dann gilt sie auch für φ, denn

$$\lambda_n(T_{ij}(\varphi(T_{kl}(U')))) = |\det T_{ij}| \lambda_n(\varphi(T_{kl}(U'))) = \int_{U'} |\det \nabla(T_{ij} \circ \varphi \circ T_{kl})| d\lambda_n$$
$$\Leftrightarrow \lambda_n(\varphi(T_{kl}(U'))) = \int_{U'} |\det \nabla\varphi| \circ T_{kl} \circ |\det T_{kl}| d\lambda_n = \int_U |\det \nabla\varphi| d\lambda_n$$

c) Sei $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Diffeomorphismus und $p \in U$ fix. Aus $|\det \nabla\varphi(p)| \neq 0$ kann man durch Vertauschung der Koordinaten in Bild- und Definitionsbereich $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} \neq 0$ erlangen. Setzen wir nun $\psi(x) := (\varphi_1(x), x_2, \cdots, x_n)$, dann ist $\det \nabla\psi = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} \neq 0$ und es existiert folglich eine Umkehrung ψ^{-1}. Für $\rho(y) = \varphi \circ \psi^{-1}$ und $y = \psi(x)$ folgt ρ lässt die erste Koordinate fix: $\rho(y) = (y_1, \rho_2(y), \cdots \rho_n(y))$. Bis auf Vertauschung kann man also jeden C^1-Diffeomorphisums als Komposition zweier C^1-Diffeomorphismen schreiben, welche mindestens eine Koordinate festlassen.

(iii) Der eigentliche Beweis erfolgt jetzt durch Induktion über n.

Induktionsanfang $n = 1$

Wir betrachten die Maße $\mu_1(A) = \lambda_1(\varphi(A))$, $\mu_2(A) = \int_A |\varphi'| d\lambda_n$ auf $\mathcal{L}(U)$.

- Für $A = [a, b]$ folgt die Behauptung über die Transformationsformel für das Riemannintegral.
- Wegen $[a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a, b - \frac{1}{n}]$ und der Unterhalbstetigkeit für Maße gilt die Gleichheit von μ und μ_2 auf dem Ring der halboffenen Intervalle. Weil μ_1 und μ_2 σ-endlich sind folgt die Gleichheit auf $\mathcal{L}(U)$ aus der Eindeutigkeit der Fortsetzung.

Induktionsvoraussetzung Die Behauptung gilt für alle C^1-Diffeomorphismen in Dimension $n - 1 \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt Sei

$$\varphi: U \ni (t, x) \mapsto (t, \varphi_t(x)) \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi_t: U_t = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n-1} \;\middle|\; (t, x) \in U \right\} \to \mathbb{R}^{n-1}$$

Dann ist $|\det \nabla\varphi|(t, x) = |\det \varphi_t|(x)$ und $\varphi(A)_t = \varphi_t(A_t)$ sowie

$$\begin{aligned}
\lambda_n(\varphi(A)) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(\varphi(A)_t) dt - \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(\varphi_t(A_t)) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{A_t} |\det \nabla\varphi_t|(x) d\lambda_{n-1}(x) dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{A_t}(x) |\det \nabla\varphi|(t, x) d\lambda_{n-1} dt \\
&= \int_A |\det \nabla\varphi| d\lambda_n
\end{aligned}$$

Beispiel Sei $K_R := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \le R^2 \right\}$ die Vollkugel mit Radius R und

$$(x, y, z) = \psi(\alpha, \beta, r) = (r \cos\alpha \cos\beta, r \cos\alpha \sin\beta, r \sin\alpha)$$

Dann ist $\psi: U = (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ ein C^1-Diffeomorphismus mit $|\det \nabla\psi| = r^2 \cos\beta$ und $\lambda_3(K_R) = \lambda_3(\psi(U))$. Mit der Transformationsformel gilt dann:

$$\lambda_3(K) = \int_{\psi(U)} d\lambda_3 = \int_U r^2 \cos\beta d\lambda^3 = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r^2 \cos\beta dr d\beta d\alpha = \frac{4}{3}\pi R^3$$

2 Vektoranalysis

Motivation/Fragestellung Häufig möchte man Analysis auf gekrümmten Flächen und anderen sogenannten „Mannigfaltigkeiten“ (manifold) durchführen. Zum Beispiel die Berechnung des Durchschnitts einer gegebenen Temperaturverteilung auf der Erdoberfläche. Letztlich betrachten wir den Gaußschen Divergenzsatz der die Aussage formalisiert, dass das Integral des Fluss über den Rand mit dem Integral über das eingeschlossene Volumen zusammenhängt.

2.1 Integration über Mannigfaltigkeiten

67 **Definition und Satz: „(Unter-) Mannigfaltigkeit, Parametrisierung“**

Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *(Unter-) Mannigfaltigkeit* der Dimension $d \leq n$, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(i) Zu jedem $x \in M$ existiert eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n, x \in U$ und ein $F \in C^1(U, \mathbb{R}^{n-d})$ sodass

$$F^{-1}(0) \cap U = M \cap U \quad \wedge \quad \forall y \in U\colon \mathrm{rk}(\nabla F(y)) = n - d$$

(mit anderen Worten sind die Elemente der Mannigfaltigkeit lokal Lösungen von $n - d$ Gleichungen)

(ii) Zu jedem $x \in M$ gibt es eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n, x \in U$ und ein injektives $\gamma \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen so, dass $\gamma(\Omega) = U \cap M$, $\gamma|_{\gamma^{-1}(M)} : \Omega \to M$ homöomorph ist und $\mathrm{rk}(\gamma'(\omega)) = d$. Dann heißt γ eine *Parametrisierung*.

(iii) Es existiert eine solche Parametrisierung γ, die in d Komponenten die identische Abbildung ist. (M ist Graph einer Funktion.)

(iv) „Bügelabbildung“: Für jedes $x \in M$ gibt es eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n, x \in U$ und ein $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sowie einen C^1-Diffeomorphismus $\gamma\colon \Omega \to U$ mit $\gamma^{-1}(M \cap U) \subseteq \mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d}$.

Hat eine Parametrisierung den maximalen Rang d, so heißt sie *regulär*.

Beweis (67) (i) $\Rightarrow$ (iii)

Bis auf Permutation der Variablen in $\mathbb{R}^d$ habe F' die Form $F'(x, y) = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y})$ mit $\frac{\partial F}{\partial y} \in \mathbb{R}^{(n-d)\times(n-d)}$ nicht singulär an der Stelle (x_0, y_0) und $F(x_0, y_0) = 0$. Dann existiert nach dem Impliziten Funktionen Theorem eine differenzierbare Funktion $g\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{n-d}$ sodass $g(x_0) = y_0$ und $F(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in \Omega$. Dann setzen wir $x = w$ und $\gamma(\omega) = \begin{pmatrix} \omega \\ g(\omega) \end{pmatrix}$. Dann gilt $\gamma'(x) = \begin{pmatrix} I \\ g'(x) \end{pmatrix}$ also $\mathrm{rk}(\gamma') = d$. Somit ist γ in hinreichend kleiner Umgebung injektiv sodass nach Einschränkung von U gilt: $\gamma(\Omega) = M \cap U \ni (x_0, y_0)$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) folgt trivialerweise, da es sich um einen Spezialfall handelt.

(ii) $\Rightarrow$ (i) O.B.d.A. $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$ mit $\gamma_1' = \frac{\partial \gamma_1}{\partial \omega} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ nichtsingulär. Dann folgt aus dem Umkehrfunktionensatz nahe $\gamma(\omega_0) = (x_0, y_0) = (\gamma_1(\omega_0), \gamma_2(\omega_0))$ die Existenz einer Funktion $h \in C^1(U(\gamma_1(\omega_0)), \mathbb{R}^d)$ mit $h(\gamma_1(\omega)) = \omega$ für alle $\omega \approx \omega_0$. Dann gilt $F(x, y) := \gamma_2(h(x)) - y \in C^1(U(\gamma_1(\omega_0)) \times U(y_0), \mathbb{R}^{n-d})$ mit $\frac{\partial F}{\partial y} = -I \in \mathbb{R}^{(n-d)\times(n-d)}$ und $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \gamma_2(\omega)$, $x = \gamma_1(\omega)$ für ein $\omega \approx \omega_0$.

Beispiel $M := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \right\}$ ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension $d = 2$, da $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ genau $\mathbb{R}^3$ auf M einschränkt und $\nabla F = 2(x, y, z) \neq 0$.

Betrachten wir nun $\tilde{M}_r := \{ (x, y, z) \in M \mid \alpha x + \beta y + \gamma z = 1 \}$, so erhalten wir unter der Bedingung $r > \frac{1}{\|(\alpha,\beta,\gamma)\|}$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $d = 1$.

Eine Parametrisierung der Kugel M ergibt sich zum Beispiel lokal am Nordpol oder Südpol über $\omega = (x, y)$ als $\gamma(\omega) = (x, y, \pm\sqrt{r^2 - x^2 - y^2})$. Am Äquator funktioniert dies jedoch nicht.

Bemerkung Mannigfaltigkeiten brauchen nicht zusammenhängend sein und können durch Vereinigungen mehrerer disjunkter Teilmanigfaltigkeiten entstehen, da die Forderungen der Defintionen nur lokaler Natur sind.

Beispiel $M = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x^T A x = \rho \right\}$ mit einem $\rho \neq 0$ und $A = A^T$ nicht singulär. Dann ist die charakterisierende Gleichung $F = x^T Ax - \rho = 0$ und $\nabla F(x) = 2Ax \neq 0$ da $x \neq 0$ für $x \in M$. Wählen wir $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, so erhalten wir $x_1^2 - x_2^2 = \rho$ und damit Hyperbelpaare.

Beispiele Die Parametrisierung der Kugel erfolgt oft mit den Eulerwinkeln. Dabei wird φ als Längengrad und θ als Azemuthwinkel, das heißt Winkel zum Nordpol, gewählt. Dann ergibt sich die Transformation $(\sin\theta\cos\varphi, \cos\theta\cos\varphi, \cos\theta)$.

$$M = \left\{ A = A^T \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \det(A) = 0, A \neq 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \middle| \underbrace{\alpha\gamma - \beta^2}_{F(\alpha,\beta,\gamma)} = 0, |\alpha| + |\gamma| > 0 \right\}$$

$$\nabla F(\alpha, \beta, \gamma) = (\gamma, -2\beta, \alpha) \neq 0 \Leftarrow A \neq 0$$

Diese Mannigfaltigkeit hat die Dimension $2 = 4 - 2$, weil die Matrix zu $\alpha\gamma - \beta\beta' = 0, \beta - \beta' = 0$: $\begin{pmatrix} \gamma & -\beta' & -\beta & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ den Range 2 hat. Es handelt sich in M um die 2×2-Matrizen mit Rang 1. Als Parametrisierung erhalten wir $\gamma_1(\underbrace{\omega_1, \omega_2}_{\omega}) = \omega\omega^T$ für die positiv semidefiniten Matrizen und $\gamma_2(\omega_1, \omega_2) = -\omega\omega^T$ für die negativ semidefiniten Matrizen.

68 **Definition: „Karte, Kartengebiet"**

Ein offenes Teilgebiet $G = M \cap U$ mit einer d-dimensionalen Mannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Kartengebiet* wenn es Bild einer injektiven regulären Parametrisierung $\gamma\colon \omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist, das heißt $\gamma(\Omega) = G$. Dann heißt γ auch *Karte* von G.

69 **Lemma: Äquivalenz von Karten**

Je zwei Karten $\gamma_1\colon \Omega_1 \to G$ und $\gamma_2\colon \Omega_2 \to G$ sind äquivalent in dem Sinne, dass es einen Diffeomorphismus $T\colon \Omega_2 \to \Omega_1$ gibt mit

$$\gamma_2 = \gamma \circ T$$

Beweis (69) Wegen der vorausgesetzten Injektivität von γ_1 und γ_2, existiert $T = \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2$ und $T^{-1} = \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1$. Nach der Regularität von γ existiert eine Projektion $P = (e_j^T)_{j \in J} \in \mathbb{R}^{d \times n}$ mit $e_j \in \mathbb{R}^n$ und $J \subseteq \{1, \cdots, n\}, |J| = d$ sodass

$$P\gamma(\omega) = (e_j^T \rho(\omega))_{j \in J} = (\gamma_j(\omega))_{j \in J} \colon \Omega \to \mathbb{R}^d$$

in einer offenen Teilmenge $\Omega_0 \subseteq \Omega$ mit $\omega_0 \in \Omega_0$ eine nichtsinguläre Jacobimatrix. $(P\gamma_1(\omega))' = (\nabla \gamma_{1,j}(\omega))_{j \in J}$. Dann existiert nach dem Satz über Umkehrfunktionen eine Funktion

$$h \colon U(P(\gamma_1(\omega_0))) \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \qquad h \circ P \circ \gamma_1(\omega) = \omega \quad \forall \omega \in \Omega_0$$

Außerdem ist h sogar stetig differenzierbar und das selbe gilt für h^{-1}. Also ist auch $T = h \circ P \circ \gamma_2(\omega_2) \colon \Omega_2 \to \Omega_1$ auf allen Umgebungen und damit auf ganz Ω_2 differenzierbar. Entsprechend ist auch T^{-1} differenzierbar und es gilt $\gamma_2 = \gamma_1 \circ T$ sowie $\gamma_1 = \gamma_2 \circ T^{-1}$.

70 **Definition: „Differenzierbarkeit“**

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit. $f \colon M \to \mathbb{R}^n$ heißt stetig differenzierbar wenn für jede Karte $\gamma \colon \Omega \to M$ die Verknüpfung $f \circ \gamma$ eine C^1-Abbildung ist $f \circ \gamma \colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

71 **Definition: „Grammatrix, Integrierbarkeit“**

(i) Für eine Karte $\gamma \colon \Omega \to G$ heißt

$$\Gamma_\gamma(\omega) = \gamma'(\omega)^T \gamma'(\omega) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \gamma_k(\omega)}{\partial \omega_i} \cdot \frac{\partial \gamma_k(\omega)}{\partial \omega_j} \right)_{j=1,\cdots,d}^{i=1,\cdots,d} \in \mathbb{R}^{d \times d}$$

die *Grammatrix* von γ. Sie ist symmetrisch positiv definit sodass

$$\forall \omega \in \Omega \colon g_\gamma(\omega) := \det(\Gamma_\gamma(\omega)) > 0$$

(ii) $f \colon G \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar bezüglich γ, falls $\omega \mapsto \sqrt{g_\gamma(\omega)} f(\gamma(\omega))$ auf der Menge Ω Lebesgue-integrierbar ist. Man setzt dann

$$\oint_\gamma f \mathrm{d}\lambda = \int_\Omega \sqrt{g_\gamma(\omega)} f(\gamma(\omega)) \mathrm{d}\omega$$

72 **Satz: Wohldefiniertheit**

Die Definition des Integrals über einer Mannigfaltigkeit ist unabhängig von der Wahl der Karte γ, sodass wir schreiben können:

$$\oint_G f \mathrm{d}\lambda := \oint_\gamma f \mathrm{d}\lambda = \int_\Omega \sqrt{g_\gamma(\omega)} f(\gamma(\omega)) \mathrm{d}\omega$$

Beweis (72) Wir betrachten die alternative Karte $\tilde{\gamma}\colon \tilde{\Omega} \to G$ mit $\tilde{\gamma} = \gamma \circ T$, $T\colon \tilde{\Omega} \to \Omega$. Nach der Kettenregel ergibt sich

$$\tilde{\gamma}'(\tilde{\omega}) = \gamma'(T(\tilde{\omega}))T'(\tilde{\omega}) \Rightarrow \Gamma_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\omega}) = T'(\tilde{\omega})^T \left(\gamma'(T(\tilde{\omega}))^T \gamma'(T(\tilde{\omega}))\right) T'(\tilde{\omega})$$
$$T_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\omega}) = T'(\tilde{\omega})^T \Gamma_\gamma(T(\tilde{\omega}))T'(\tilde{\omega})$$
$$g_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\omega}) = \det(T'(\tilde{\omega}))^2 g_\gamma(T(\tilde{\omega}))$$
$$\oint_{\tilde{\gamma}} f\mathrm{d}\lambda = \int_{\tilde{\Omega}} f(\tilde{\gamma}(\tilde{\omega}))\sqrt{g_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\omega})}\mathrm{d}\tilde{\omega} = \int_{\tilde{\Omega}} f(\gamma \circ T(\tilde{\omega}))\sqrt{g_\gamma(T(\tilde{\omega}))}|\det(T(\tilde{\omega}))|\mathrm{d}\tilde{\omega}$$
$$= \int_\Omega f(\gamma(\omega))\sqrt{g_\gamma(\omega)}\mathrm{d}\omega = \oint_\gamma f\mathrm{d}\lambda$$

nach dem Transformationssatz.

73 **Korollar:**

Falls $\gamma(\omega) = \begin{pmatrix} \omega \\ h(\omega) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d\times n}$ ergibt sich

$$\oint_\gamma f\mathrm{d}\lambda = \int_\Omega f(\gamma(\omega))\sqrt{\det(i + \nabla h(\omega)^T \nabla h(\omega))}\mathrm{d}\omega$$

speziell für Hyperflächen, das heißt $d = n - 1 \Rightarrow h \in \mathbb{R}$:

$$\oint_\gamma f\mathrm{d}\lambda = \int_\Omega f(\omega, h(\omega))\sqrt{1 + \|\nabla h(\omega)\|_2^2}\mathrm{d}\omega$$

Beweis (73)

$$\gamma = \begin{pmatrix} \omega \\ h(\omega) \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma' = \begin{pmatrix} I \\ \nabla h(\omega) \end{pmatrix} \Rightarrow \Gamma(\omega) = \gamma'(\omega)^T \gamma'(\omega) = I + \nabla h(\omega)^T \nabla h(\omega)$$

Ist $d = n - 1$, das heißt M ist eine Hyperfläche, so ist $a := \nabla h(\omega) \in \mathbb{R}^n$ also $\Gamma = I + aa^T$ und $\det(I + aa^T) = \prod_{j=1}^n \lambda_j$ wobei λ_j die Eigenwerte sind. a ist Eigenvektor mit Eigenwert $1 + \|a\|^2$ und kann zu einer orthogonalen Basis erweitert werden, sodass $\lambda_j = 1$ für $j = 1, \cdots, n$. Also ist $\det(I + aa^T) = 1 + \|a\|_2^2$ wie behauptet.

Anwendung Wir wollen die Fläche der Nordhalbkugel mit Radius 2 berechnen, die im Schnitt mit dem Zylinder $x + (y - 1)^2 = 1$ liegt. Dabei verwenden wir die folgenden Eulerwinkel:

$(2\sin\theta\cos\varphi, 2\sin\theta\sin\varphi, 2\cos\theta)$ und es ergibt sich

$$\gamma'(\omega) = 2\begin{pmatrix}\cos(\theta)\cos(\varphi) & -\sin(\theta)\sin(\varphi)\\ \cos(\theta)\sin(\varphi) & \sin(\theta)\cos(\varphi)\\ -\sin(\theta) & 0\end{pmatrix}$$

$$\Gamma(\omega) = \gamma'(\omega)^T\gamma'(\omega) = 4\begin{pmatrix}\cos^2(\theta)\cos^2(\varphi)+\cos^2(\theta)\sin^2(\varphi)+\sin^2(\theta) & 0\\ 0 & \sin^2(\theta)\sin^2(\varphi)+\sin^2(\theta)\cos^2(\varphi)\end{pmatrix}$$

$$= 4\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sin^2(\theta)\end{pmatrix} \Rightarrow \sqrt{g_\gamma(\omega)} = 4\sin(\theta)$$

Was ist der Parametrisierungsbereich $\Omega = \left\{\, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \;\middle|\; \pi - \theta < \varphi < \theta \,\right\}$? Auf der Schnittkurve gilt

$$(2\sin(\theta)\cos(\varphi))^2 + (2\sin(\theta)\sin(\varphi) - 1)^2 = 1 \Rightarrow \sin(\theta) = \sin(\varphi)$$

Im Inneren des kleinen Kreises gilt $\theta < \varphi < \pi - \theta$ und es ergibt sich die Fläche des Ausschnittes:

$$\int_\Omega \mathbf{1}\sqrt{g_\gamma(\omega)}\mathrm{d}\omega = \int_{[0,\frac{\pi}{2}]}\int_{[\theta,\pi-\theta]} 2\sin(\theta)\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = \int_{[0,\frac{\pi}{2}]} 2\sin(\theta)(\pi-2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= [-2\cos(\theta)(\pi-2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_{[0,\frac{\pi}{2}} 2\cos(\theta)2\mathrm{d}\theta = 2\pi - [4\sin(\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi - 4$$

Dies ist offensichtlich falsch, da die Schnittfläche des Kegels mit der xy-Ebene die Fläche $\pi > 2\pi - 4$ hat $\lightning$.

Die Anwendung der jeweiligen Ergebnisse für Lebesgue-Integrale über $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ auf Funktionen $f(\gamma(\omega))\sqrt{g_\gamma(\omega)}$ ergibt

(i) ist f integrabel über G, so sind auch $|f|$ und f^-, f^+ integrabel

(ii) sind f_k auf G integrabel und konvergieren monoton steigend, punktweise gegen f, so konvergieren auch die Integrale gegen das von f.

(iii) beschränkte Konvergenz

Frage Wie definiert man das Integral über einer Untermannigfaltigkeit, die nicht durch eine einzige Karte überdeckt werden kann. (z.B. S^2)

Antwort Man verwendet eine Zerlegung der 1.

74 **Definition: „Zerlegung der 1“**

Eine abzählbare Menge von Funktionen $\varepsilon_i\colon M \to [0,1]$ heißt Zerlegung der 1 auf M falls alle Träger $\operatorname{supp}\varepsilon_i = \overline{\left\{\, x \in M \;\middle|\; \varepsilon_i > 0 \,\right\}} = \overline{\varepsilon_i^{-1}(\{0\})}$ im Inneren eines Kartengebietes von M enthalten sind und

$$\forall x \in M\colon \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i(x) = 1$$

wobei jedes x nur zu endlich vielen Trägern gehören darf.

Beispiel Man kann zum Beispiel die Hutfunktionen $\varepsilon_k = \max(0, 1 - |x-k|)$ wählen. Diese ist zwar global Lipschitzstetig aber nicht überall differenzierbar.

Alternativ wählt man die C^∞-Funktion

$$\psi_\rho(d) = \mathbf{1}_{[0,\rho]} e^{1-\frac{\rho}{\rho-d}}$$

Zu zeigen: Jede Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ besitzt eine Zerlegung der Eins mit stetigen Funktionen ε_i die auf einer offenen Umgebung von M in $\mathbb{R}^n$ definiert werden können.

Folgerung Wir können definieren

$$\oint_M f \mathrm{d}\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \oint_{G_k} f_k \mathrm{d}\lambda, \quad f_k = f \cdot \varepsilon_k$$

und dem Gebiet $G_k \supseteq \operatorname{supp}(\varepsilon_k)$. Zu zeigen bleibt Wohldefiniertheit und Eindeutigkeit.

75 Lemma: lokale Funktionen

Sei M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $x \in V \subseteq M$ mit V offen in M. Dann existiert eine stetige Funktion $\varphi\colon M \to [0,1]$ sodass $\varphi(x) \neq 0$ und $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq V$.

Beweis (75) Man wählt zum Beispiel ein $\rho > 0, \tilde{x} \in V$, $\overline{B_\rho(\tilde{x})} \cap M \subseteq M$ und die Funktion $\varphi_\rho(\|\tilde{x} - x\|)$.

76 Satz: Kompakte Ausschöpfung

Für jede Untermannigfaltigkeit M existiert eine aufsteigende Folge kompakter $K_i \subseteq M$ sodass

$$K_i \subseteq \overline{K_i} \subseteq K_{i+1} \subseteq \overline{K_{i+1}} \subseteq K_{i+2} \subseteq \cdots$$

und $M = \bigcup_{i=1}^\infty K_i$.

Beweis (76) Man definiere ein abzählbares System offener Menge $V_i \subseteq M$ mit $\overline{V_i} \subseteq M$, z.B. $V_i = Q_i \cap M$ wobei die Q_i offene Quader mit rationalen Ecken sind und $\overline{Q_i} \cap M$ kompakt sowie $\bigcup_{i=1}^\infty V_i = M$ und wähle

$$K_1 = \overline{V_1} \qquad K_i = \bigcup_{i=1}^{k_i} \overline{V_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k_{i+1}} V_i$$

für hinreichend große k_i. Die so konstruierten K_i erfüllen die Behauptung.

77 Korrolar und Definition: „Atlas“

Jede Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ hat einen abzählbaren *Atlas* $\mathcal{A} = (G_i)_{i\in\mathbb{N}}$, das heißt eine Vereinigung abzählbar vieler Kartengebiete G_i.

Beweis (77) Wir wissen jeder Punkt $x \in M$ gehört zu einem Kartengebiet. Jedes K_i wird also durch endlich viele dieser Kartengebiete überdeckt (wegen Kompaktheit). Das System aller dieser ausgewählten Kartengebiete ist somit abzählbar.

78 **Satz: untergeordnete Zerlegungen der 1**

Zu jedem Atlas $\mathcal{A}$ einer Untermannigfaltigkeit M gibt es eine Zerlegung der 1,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i = 1, \qquad \varepsilon_i\colon M \to [0,1], \varepsilon_i \in C(M)$$

die ihr untergeordnet ist in dem Sinne, dasss i ein G_j existiert sodass $\operatorname{supp}(\varepsilon_i) \subseteq G_j$.

Beweis (78) $K_i \setminus \operatorname{Int}(K_{i-1}) \subseteq \operatorname{Int}(K_{i+1}) \setminus K_{i-2}$ offen.

Für alle $x \in K_i \setminus \operatorname{Int}(K_{i-1})$ existiert eine Umgebung $V \subseteq \operatorname{Int}(K_{i+1}) \setminus K_{i-2}$ und entsprechend eine Funktion $\varphi_{ix}\colon M \to [0,1]$ mit $\varphi_{ix}(x) > 0$ und $\operatorname{supp}(\varphi_{ix}) \subseteq G_j \cap (\operatorname{Int}(K_{i+1}) \setminus K_{i-2})$. Die strikten Träger $\left\{ \tilde{x} \in M \;\middle|\; \varphi_{ix}(\tilde{x}) > 0 \right\}$ bilden eine offene Überdeckung des $K_i \setminus \operatorname{Int}(K_{i-1})$. Also gibt es eine endliche Teilüberdeckung durch die Träger von Funktionen φ_{ij} für $j = 1, \cdots, n_i < \infty$.

Da die Träger der φ_{ij} höchstens noch nach $K_{i+1} \setminus K_i$ oder $K_{i-1} \setminus K_{i-2}$ reichen, schneiden höchstens $n_{i-1} + n_i + n_{i+1}$ die Menge $K_i \setminus \operatorname{Int}(K_{i-1})$. Folglich gehört jedes $x \in M$ höchstens zu endlich vielen Trägern der φ_{ij} und die Summe

$$\varphi(x) \colon= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{ij}(x)$$

ist eine überallpositive, stetige Funktion. Deshalb ist

$$\varepsilon_{ij} \colon= \frac{\varphi_{ij}}{\varphi}$$

eine stetige Funktion und nach Umsortierung eine Zerlegung der 1.

79 **Lemma und Definition: „Integral auf einem Kartengebiet"**

Falls $f\colon M \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{supp}(f) \subseteq G$ ein Kartengebiet ist, so ist f auf G integrierbar genau dann, wenn für jede Zerlegung der 1 die Produkte $f \cdot \varepsilon_i$ auf G integrierbar sind und $\sum_{i=1}^{\infty} \int_G |f\varepsilon_i| \mathrm{d}\lambda_d$ existiert. Dann gilt

$$\int_G f \mathrm{d}\lambda_j = \sum_{i=1}^{\infty} \int_G f\varepsilon_i \mathrm{d}\lambda_j$$

Beweis (79)

Fall 1 $d = n$, das heißt $M = \Omega$ ist offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Ist f integrierbar auf g, so ist auch $|f|$ integrierbar auf G, also $|\varepsilon_i f| \leq |f|$ für jedes i und $|\varepsilon_i f|$ ist integrierbar nach Majorantenkriterium.

$\tilde{f}_k = (\sum_{i=1}^k \varepsilon_i)|f|$ ist eine monoton steigende, punktweise konvergente Folge, sodass nach monotoner Konvergenz gilt

$$\int_G |f| \mathrm{d}\lambda_n = \lim_{k\to\infty} \int_G \sum_{i=1}^k \varepsilon_i |f| \mathrm{d}\lambda_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^k \int_G \varepsilon_i |f| \mathrm{d}\lambda_n = \sum_{i=1}^\infty \int_G |\varepsilon_i f| \mathrm{d}\lambda_n$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_G \sum_{i=1}^k \varepsilon_i f \mathrm{d}\lambda = \int_G f \mathrm{d}\lambda$$

folgt nach Lebesgue aus gemeinsamer Beschränkung $|\sum_{i=1}^k \varepsilon_i f| \leq |f|$.

Fall 2 Ist M eine echte d-dimensionale Untermannigfaltigkeit, so betrachtet man Parametrisierungen $\gamma\colon \Omega \to G$ und wendet die Argumentation von Fall 1 auf die Zerlegung der 1 $\eta_i := \varepsilon_i \circ \gamma$ auf Ω und den Integranden $\tilde{f} := (f \circ \gamma)\sqrt{g_\gamma}$ an.

Bemerkung Die Zerlegung der 1 ist eher ein theoretisches als ein praktischen Werkzeug. Integrale über Mannigfaltigkeiten müssen fast immer numerisch angenähert werden. Dann sind verschiedene Darstellungen über Zerlegungen nicht mehr exakt äquivalent.

80 **Definition und Satz: „Integrierbarkeit auf Untermannigfaltigkeiten“**

Ist M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, so heißt $f\colon M \to [-\infty, \infty]$ integrierbar über M falls für einen Atlas $\mathcal{A}$ und eine untergeordnete Zerlegung der 1, $1 = \sum_{i=1}^\infty \varepsilon_1$ gilt, dass die $f\varepsilon_i$ mit $\mathrm{supp}(\varepsilon_i) \subseteq G_j$ integrierbar sind und

$$\sum_{i=1}^\infty \int_M |f|\varepsilon_i \mathrm{d}\lambda_d < \infty$$

Dann setzt man

$$\int_M f \mathrm{d}\lambda_d := \sum_{i=1}^\infty \int_M f\varepsilon_i \mathrm{d}\lambda_d$$

Beweis (80) Es ist die Unabhängigkeit von der Wahl des Atlas und der Zerlegung der 1 zu zeigen. Wähle also einen anderen Atlas $\mathcal{A}'$ und eine untergeordnete Zerlegung der 1: $\sum_{i=1}^\infty \eta_i = 1$.

$|f\eta_k\varepsilon_i| \leq |f\varepsilon_i|$ mit $\mathrm{supp}(f\eta_k\varepsilon_i) \subseteq \mathrm{supp}(f\varepsilon_i) \subseteq G_j$. Also sind sowohl $f\eta_k\varepsilon_i$ als auch $|f\eta_k\varepsilon_i|$ integrierbar nach Lemma und Definition 79 (Integral auf einem Kartengebiet) und es gilt

$$\int_M f\eta_k \mathrm{d}\lambda_d = \sum_{i=1}^\infty \int_M f\eta_k\varepsilon_i \mathrm{d}\lambda_d$$

$$\int_M |f\eta_k| \mathrm{d}\lambda_d = \sum_{i=1}^\infty \int_M |f\eta_k|\varepsilon_i \mathrm{d}\lambda_d$$

Umgekehrt gilt wegen der Integrierbarkeit von $f\varepsilon_i$ und Zerlegungseigenschaft von η_k

$$\int_M f\varepsilon_i \mathrm{d}\lambda_d = \sum_{k=1}^{\infty} \int_M f\varepsilon_i \eta_k \mathrm{d}\lambda_d$$

Summation über i ergibt für Absolutbeträge

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_M |f|\varepsilon_i \eta_k \mathrm{d}\lambda_d = \sum_{i=1}^{\infty} \int_M |f|\varepsilon_i \mathrm{d}\lambda_d < \infty$$

Deswegen darf die Doppelsumme umgeordnet werden.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_M |f|\varepsilon_i \mathrm{d}\lambda_d = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \int_M |f|\varepsilon_i \eta_k \mathrm{d}\lambda_d = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \int_M |f|\eta_k \mathrm{d}\lambda_d$$

Das Gleiche folgt aus beschränkter Konvergenz nach Lebesgue für den Integranden ohne Betrag. Also sind beide Darstellungen wohldefiniert und ergeben denselben Wert.

81 **Definition: „Messbarkeit, Volumen“**

Eine beliebige Teilmenge $A \subseteq M$ heißt *messbar*, wenn die charakteristische Funktion $\mathbf{1}_A \colon M \to \{0, 1\}$ integrierbar ist. Man nennt dann

$$V_M(A) := \int_M \mathbf{1}_A \mathrm{d}\lambda_d$$

das *Volumen* von A.

82 **Satz: Kompakta**

Jede stetige Funktion auf einer kompakten Teilmenge $A \subseteq M$ ist darüber integrierbar.

Beweis (82) Wir betrachten nur den Fall, dass A Teilmenge eines Kartengebiets. (Allgemein dann mit Zerlegung der 1) Mit $\gamma \colon \Omega \to G$ ergibt sich die stetige Funktion $\sqrt{g_\gamma(\omega)} f(\gamma(\omega))$. Das Urbild $B := \gamma^{-1}(A)$ ist auch kompakt und messbar. Also ist

$$\int_A f \mathrm{d}\lambda_d = \int_M f \mathbf{1}_A \mathrm{d}\lambda_d = \int_\Omega (f \circ \gamma)(\omega) \sqrt{g_\gamma(\omega)} \mathbf{1}_B(\omega) \mathrm{d}\omega$$

Bemerkung Sätze über monotone und beschränkte Konvergenz lassen sich auf Untermannigfaltigkeiten erweitern.

Nächste Hürde Viele „Oberflächen“ sind keine regulären Mannigfaltigkeiten sondern haben „Knicke“, das heißt Ableitungssprünge in Parametrisierungen.

83 **Definition: „Hausdorff Nullmengen“**

Eine Menge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Hausdorff Nullmenge* der Dimension $d \leq n$ oder kurz d-Nullmenge, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Überdeckung $N \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$ mit Würfeln der Kantenlänge r_i existiert sodass $\sum_{i=1}^{\infty} r_i^d \leq \varepsilon$.

Beispiel Für $d = n$ erhalten wir genau die Nullmengen bezüglich des Lebesguemaßes λ_n.

84 **Lemma: Elementare Eigenschaften**

(i) Jede Teilmenge einer d-Nullmenge ist wieder eine d-Nullmenge

(ii) Für $d \leq d'$ ist jede d-Nullmenge auch eine d'-Nullmenge

(iii) Jede abzählbare Vereinigung von d-Nullmengen ist wieder eine d-Nullmenge.

85 **Lemma: Vererbung unter Lipschitz- bzw. C¹-Abbildungen**

(i) Falls $N \subseteq \mathbb{R}^n$ d-Nullmenge und $F\colon N \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante L ist, dann ist auch $F(N) \subseteq \mathbb{R}^m$ eine d-Nullmenge.

(ii) Falls $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ auf einem offenen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $N \subseteq U$ d-Nullmenge ist, dann ist auch $F(N)$ eine d-Nullmenge.

Beweis (85)

(i) $N \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} r_k^d \leq \varepsilon$, dann folgt aus dem Schrankensatz $F(W_k \cap N) \subseteq \tilde{W}_k$ mit Kantenlängen von höchstens $2Lr_k$. Dann folgt dass auch $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{r}_k^d \leq 2^d L^d \varepsilon$ beliebig klein gemacht werden kann.

(ii) Betrachte eine Ausschöpfung von $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ durch kompakte Teilmengen, zum Beispiel Würfel mit rationalen Ecken. Dann hat $\|F'(x)\|$ auf K_i jeweils ein Maximum L_i, dass Lipschitz-Konstante von f auf $K_i \cap N$ ist. Daraus folgt nach (i), dass $F(K_i \cap N)$ und nach (iii) von Lemma 84 (Elementare Eigenschaften) auch die abzählbare Vereinigung $F(N) = \bigcup_{i=1}^{\infty} F(N \cap K_i)$ d-Nullmenge ist.

86 **Korollar: Untermannigfaltigkeiten**

Jede d dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist $d + j$-Nullmenge für $1 \leq j \leq n - d$.

Beweis (86) Betrachte einen Atlas $\mathcal{A} = \{G_j\}_{j=1,\cdots,\infty}$ mit $G_j = \gamma_j(\Omega_j)$ für $\Omega_j \subseteq \mathbb{R}^d$. Wobei o.B.d.A. $\gamma_j(\omega) = \begin{pmatrix} \omega \\ h_j(\omega) \end{pmatrix}$, $\omega \in \mathbb{R}^d$ einmal stetig differenzierbar. Modifiziere

$$\tilde{\gamma}_j \begin{pmatrix} \omega_i \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \gamma_j(\omega_1), \omega_1 \times \omega_2 \in \underbrace{\Omega_j \times \{0\}^{n-d}}_{\tilde{\Omega}_j} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Dann ist $\tilde{\Omega}_j \subseteq \mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d}$ $(d+i)$-Nullmenge wegen der Differenzierbarkeit für das Bild $\tilde{\gamma}_j(\tilde{\Omega}_j) = \gamma_j(\Omega_j) = G_j$. Damit ist auch die gesamte Mannigfaltigkeit $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j$ ebenfalls eine d-Nullmenge.

87 **Satz: Nullmengenkriterium**

Eine Teilmenge $N \subseteq M$ einer Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist d-Nullmenge genau dann, wenn für jede Karte $\gamma_i \colon \Omega_i \to G_i$ in einem Atlas $M \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ gilt, dass $\gamma_i^{-1}(N \cap G_i)$ d-Nullmenge ist. Was wiederum äquivalent zu $\lambda_d(\gamma_i^{-1}(N \cap G)) = 0$ ist.

Beweis (87) Die letzte Äquivalenz folgt wiederum aus der Maßtheorie, da $\Omega_i = \gamma^{-1}(G_i) \subseteq \mathbb{R}^d$. N ist d-Nullmenge $\Leftrightarrow$ $N \cap G_i$ ist d-Nullmenge für jedes $i \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \gamma^{-1}(N \cap G_i)$ ist d-Nullmenge, da γ_i nach Definition ein Diffeomorphismus ist.

88 **Satz: Änderung von Integranden**

Fals $f, \tilde{f} \colon M \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und f über einer d-dimensionalen Mannigfaltigkeit M integrierbar ist. Dann folgt aus der Bedingung, dass

$$N = \left\{ f(x) \neq \tilde{f}(x) \;\middle|\; x \in M \right\}$$

eine d-Nullmenge ist, die Integrierbarkeit von $\tilde{f}$ über M mit

$$\int_M \tilde{f} \, \mathrm{d}\lambda_d = \int_M f \, \mathrm{d}\lambda_d$$

Mit anderen Worten: Der Wert des Integrals ändert sich nicht, wenn man den Integranden auf einer d-Nullmenge ändert.

Beweis (88) Für ein individuelles Kartengebiet $G = \gamma(\Omega)$ ist

$$\int_G f \, \mathrm{d}\lambda_d = \int_\Omega (f \circ \gamma)(\omega) \sqrt{g_\gamma(\omega)} \mathrm{d}\omega = \int_\Omega (\tilde{f} \circ \gamma)(\omega) \sqrt{g_\gamma(\omega)} \mathrm{d}\omega = \int_G \tilde{f} \, \mathrm{d}\lambda_d$$

da $\tilde{f} \circ \gamma$ von $f \circ \gamma$ nur auf der d-Nullmenge $\gamma^{-1}(G \cap N)$ abweichen kann. Auf ganz M ergibt sich dann die Behauptung sofort mit einer geeigneten Zerlegung der 1.

89 **Definition: „C^1-Fläche“**

Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *C^1-Fläche* der Dimension d falls es eine nichtleere Teilmenge $M \subseteq X$ gibt, sodass

(i) M eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$ ist.

(ii) $X \setminus M$ ist eine d-Nullmenge.

(iii) M liegt dicht in X.

Falls $d = n - 1$ ist spricht man von einer *C^1-Hyperfläche*.

90 **Definition und Satz: „“**

Für eine C¹-Fläche X und f integrierbar auf dem regulären Teil $M \subseteq X$ setze

$$\oint_X f \mathrm{d}\lambda_d := \oint_M f \mathrm{d}\lambda_d$$

Diese Definition ist eindeutig, das heißt sie ergibt denselben Wert für alle möglichen $M \subseteq X$.

Beweis (90) Sei $\tilde{M}$ ein alternativer regulärer Teil. Dann ist auch $X \setminus (M \cap \tilde{M}) = (X \setminus M) \cup (X \setminus \tilde{M})$ ist auch eine d-Nullmenge. Außerdem ist $M \setminus \tilde{M} \subseteq X \setminus \tilde{M}$ sowie $\tilde{M} \setminus M \subseteq X \setminus M$ eine d-Nullmenge und somit

$$\oint_M f \mathrm{d}\lambda_d = \oint_{M \cap \tilde{M}} f \mathrm{d}\lambda_d = \oint_{\tilde{M}} f \mathrm{d}\lambda_d$$

2.2 Integralsätze von Gauß und Stokes

Der Integralsatz von Gauß wird auch *Divergenzsatz* genannt.

Intuitive Herleitung Sei $F(x) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Flussgeschlindigkeit einer imkompressiblen Flüssigkeit und $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein zusammenhängendes Gebiet mit stückweise glattem Rand. $\nu \colon \partial G \to \mathbb{R}^n$ ist der nach außen zeigende *Normalenvektor*. $F(x)^T \nu(x) = \langle F(x), \nu(x) \rangle$ ist der normale Fluss an der Stelle $x \in \partial G$. Der gesamte Fluss für die Einheitsnormalen $\|\nu(x)\|_2 := 1$ ist, wenn wir G in zwei Gebiete G_1 und G_2 disjunkt zerteilen:

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial G} F(x)^T \nu(x) \mathrm{d}\lambda_{n-1}(x) = \int_{\partial G \setminus \partial G_2} F(x)^T \nu(x) \mathrm{d}\lambda_{n-1}(x) + \int_{\partial G \setminus \partial G_1} F(x)^T \nu(x) \mathrm{d}\lambda_{n-1}(x) \\
&= \int_{\partial G_1 \setminus \partial G_2} F(x)^T \nu_1(x) \mathrm{d}\lambda_{n-1}(x) + \int_{\partial G_2 \setminus \partial G_1} F(x)^T \nu_2(x) \mathrm{d}\lambda_{n-1}(x) \\
&+ \underbrace{\int_{\partial G_1 \cap \partial G_2} F(x)^T \nu_1(x) \mathrm{d}\lambda_{n-1}(x) + \int_{\partial G_1 \cap \partial G_2} F(x)^T \nu_2(x) \mathrm{d}\lambda_{n-1}(x)}_{\substack{=0 \\ \Leftarrow \quad \nu_1 = -\nu_2}} \\
&= \int_{\partial G_1} F(x)^T \nu_1 \mathrm{d}\lambda_{n-1}(x) + \int_{\partial G_2} F(x)^T \nu_2(x) \mathrm{d}\lambda_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

Wiederholte Zerlegung in Würfel $W_i, i = 1, \cdots, m$ ergibt

$$\int_{\partial G} F(x)^T \nu(x) \mathrm{d}\lambda_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^m \int_{\partial W_i} F(x)^T \nu_i(x) \mathrm{d}\lambda_{n-1} + \text{ Randstückchen}$$

Wobei W_i offen, paarweise disjunkt sind und $\bigcup_{i=1}^m W_i \approx G$.

Frage Was ist $\int_{\partial W} F(x)^T \nu(x) \mathrm{d}\lambda_{n-1}(x)$ für Würfel der Kantenlänge $2r$ mit Zentrum im Ursprung? Da Kanten und Ecken $(n-1)$-Nullmengen sind, ergibt sich

$$I := \int_{\partial W} F(x)^T \nu(x) \mathrm{d}\lambda_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{Q_k^+} F(x) e_k \mathrm{d}\lambda_{n-1}(x) - \int_{Q_k^-} F(x)^T e_k \mathrm{d}\lambda_{n-1}(x) \right)$$

wobei $Q_k^{\pm} := \left\{ (w_1, \cdots, w_{k-1,\pm r, w_{k+1}, \cdots, w_n}) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; -r < w_i < r \right\}$ die Seitenhyperflächen des Würfels sind.

Die $Q_k^{\pm}$ sind Untermannigfaltigkeiten der Dimension $n-1$ parametrisiert durch $n-1$ Werte w_j mit entsprechender Haar-Matrix $I \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$.

$$I = \sum_{k=1}^{n} \Bigg(\int_{[-r,r]} \cdots \int_{[-r,r]} e_k^T F(w_1, \cdots, w_{k-1}, r, w_{k+1}, \cdots, w_n \mathrm{d}w_1 \cdots \mathrm{d}w_{n-1}$$
$$- \int_{[-r,r]} \cdots \int_{[-r,r]} e_k^T F(w_1, \cdots, w_{k-1}, -r, w_{k+1}, \cdots, w_n \mathrm{d}w_1 \cdots \mathrm{d}w_{n-1} \Bigg)$$

Nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung gilt für $F_k = e_k^T F$:

$$F_k(w_1, \cdots, w_{k-1}, r, w_{k+1}, \cdots, w_n) - F_k(w_1, \cdots, w_{k-1}, -r, w_{k+1}, \cdots, w_n)$$
$$= \int_{[-r,r]} \frac{\partial F_k}{\partial x_k}(w_1, \cdots, w_{k-1}, x_k, w_{k+1}, \cdots, w_n)\bigg|_{w_k} \mathrm{d}w_k$$

Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$\int_{\partial W} F(x)^T \nu(x) \mathrm{d}\lambda_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_{[-r,r]} \cdots \int_{[-r,r]} \frac{\partial}{\partial x_k} F_k(w) \mathrm{d}w_1 \cdots \mathrm{d}w_n$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \int_W \frac{\partial}{\partial x_k} F(x) \mathrm{d}\lambda_n(x) = \int_W \operatorname{div}(F(x)) \mathrm{d}\lambda_n(x)$$

wobei

$$\operatorname{div}(F(x)) := \operatorname{Tr}(\nabla F(x)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_k(x)}{\partial x_k}$$

die *Divergenz* von F an x ist.

Das übertragen wir dann auf das gesamte Gebiet über die Zerlegung in Würfel und erhalten den Integralsatz von Gauß

$$\int_{\partial G} F(x)^T \nu(x) \mathrm{d}\lambda_{n-1}(x) = \int_G \operatorname{div}(F(x)) \mathrm{d}\lambda_n(x)$$

Beispiel Sei $G = S_2$. Dann ist der Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ gleichzeitig der Normalenvektor und somit gilt

$$\int_{S_2} xy + yz + zx \mathrm{d}\lambda_2 = \int_{S_2} \begin{pmatrix} y & z & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mathrm{d}\lambda_2 \overset{\text{Gauß}}{=} \int_{B_1(0)} \underbrace{\operatorname{div}(\begin{pmatrix} y & z & x \end{pmatrix})}_{=0} \mathrm{d}\lambda_3 = 0$$

Bemerkung Zu klären bleibt die genau Definition und Berechnung der Normalen $\nu(x)$ an fast allen Randpunkten eines geeigneten Gebietes G.

91 **Definition und Satz: „Normale“**

An jedem Punkt x_0 einer regulären Hyperfläche $M \subseteq \mathbb{R}^n$ (d.h. Untermannigfaltigkeit der Dimension $d = n-1$) existiert ein sogenannter Normalenvektor $\nu\colon M \to \mathbb{R}^n$, $\nu(x_0) \neq 0$ so, dass für alle differenzierbaren Pfade $x, x(t) \in M, x(0) = x_0$ gilt

$$\nu(x_0)^T \left.\frac{\partial}{\partial t} x(t)\right|_{t=0} = \nu(x_0)x'(0) = 0$$

Je zwei Normalen $\nu(x_0)$ und $\tilde{\nu}(x_0)$ mit dieser Eigenschaft sind Vielfache voneinander. Falls M lokal Nullstellenmenge einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist, mit $\nabla f(x_0) \neq 0$ so bildet dieser Gradient nach Transposition eine Normale.

Beweis (91) Da ein geeignetes f existiert und für beliebig differenzierbares $x, x(t) \in M$ gilt

$$0 = \left.\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{f(x(t))}_{\equiv 0}\right|_{t=0} = \nabla f(x_0) \nabla x(0)$$

Das heißt $\nu(x_0) = \nabla f(x_0)^T$ ist Normale.

Für eine Parametrisierung $\gamma\colon \Omega \to M, x_0 \in \gamma(\Omega)$ betrachte einen beliebigen Pfad $x\colon \mathbb{R} \to M$, $x(t) = \gamma(w_1, \cdots, w_{k-1}, w_k + t, w_{k+1}, \cdots, w_n) \in M$ mit der Tangenten $x'(0) = \frac{\partial \gamma}{\partial w_k}(x_0) \cdot 1$. Jegliche Normale muss also orthogonal zu den Spalten der Matrix $A := \nabla \gamma(x_0) \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)}$ sein: $A^T \nu = 0$. Da laut Voraussetzung $\operatorname{rk}(A) = n-1$ ist, ist der Kern von A eindimensional, sodass nichtnullelemente Vielfache voneinander und insbesondere von $\nabla f(x_0)$ sind.

92 **Korollar: Orientierbarkeit**

Wenn $M = f^{-1}(0)$ oder $M = \gamma(\Omega)$ ein Kartengebiet ist, dann ist M orientierbar in dem Sinne, dass es eine stetige Normale $\nu\colon M \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gibt.

Beweis (92) In 1. Fall wähle $\nu(x) = \nabla f(x) \neq 0$ der 2. Fall wird später mit Hilfe des äußeren Produktes gezeigt.

Bemerkung Das Möbiusband ist nicht orientierbar.

93 **Definition: „Integral in Normalenrichtung“**

Falls M eine orientierbare Hyperfläche ist mit *Einheitsnormalen* ν, $\|\nu(x)\| = 1$, so setzen wir

$$\oint_{(M,\nu)} F(x)\mathrm{d}\lambda_{n-1}(x) := \oint_M F(x)\nu(x)\mathrm{d}\lambda_{n-1}(x)$$

für beliebige stetige $F\colon M \to \mathbb{R}$.

94 **Definition: „regulärer Randpunkt, C¹-Polyeder, C¹-Polytop“**

Für $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt $x_0 \in G$ *regulärer Randpunkt* von G, wenn es eine offene Umgebung U von x_0 und eine Funktion $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ gibt, sodass $G \cap U = \{ x \in U \mid f(x) \leq 0 \}$ und $\forall x \in U\colon \nabla f(x) \neq 0$ ist. Die Menge aller solcher Punkte ist offen in G und heißt *regulärer Rand* $\partial^r G$. Falls der *singuläre Rand* $\partial G \setminus \partial^r G$ eine $(n-1)$-Nullmenge und in G abgeschlossen ist, heißt G *C¹-Polyeder*. Wenn G außerdem beschränkt und damit kompakt ist, heißt es *C¹-Polytop*.

Bemerkung Nach dieser Definition ist der reguläre Rand eine Teilmannigfaltigkeit.

95 **Definition: „Integral über C¹-Polytop“**

Für ein C¹-Polytop G und $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig auf einer Umgebung von G setze

$$\int_{\partial G} F(x)\nu(x)\mathrm{d}\lambda_{n-1}(x) := \oint_{\partial^r G} F(x)\nu(x)\mathrm{d}\lambda_{n-1}(x)$$

wobei jeweils $\nu(x) = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$ und $x \in \partial^r G$. Diese Normale ist eindeutig.

96 **Lemma:**

Betrachte den berandeten Würfel

$$\tilde{W} := \left\{ (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1 \cdots, n-1, \quad 0 \leq x_n \leq h(x_1, \cdots, x_{n-1}) \right\}$$

mit $h \in C^1(U)$ und $U \supseteq [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}]$, $h > 0$ und $F \in C^1(\tilde{U})$ mit $\tilde{U} \supseteq \tilde{W}$. Dann gilt

$$\int_{\tilde{W}} \operatorname{div}(F(x))\mathrm{d}\lambda_n(x) = \int_{\partial \tilde{W}} F(x)\nu(x)\mathrm{d}\lambda_{n-1}(x)$$

Beweis (96) Mit $F_k := e_k^T F$:

$$
\begin{aligned}
\int_{\tilde{W}} \operatorname{div}(F(x)) \mathrm{d}\lambda_n(x) &= \int_{\tilde{W}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} F_k(x) \mathrm{d}\lambda_n(x) \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \sum_{k=1}^{n} \int_{[a_1,b_1]} \cdots \int_{[a_{n-1},b_{n-1}]} \int_{[0,h(x_1,\cdots,x_{n-1})]} \frac{\partial}{\partial x_k} F_k(x_1,\cdots,x_n) \mathrm{d}x_n \, \mathrm{d}x_{n-1} \cdots \mathrm{d}x_1 =: \sum_{k=1}^{n} I_k \\
I_n &= \int_{[a_1,b_1]} \cdots \int_{[a_{n-1},b_{n-1}]} F_n(x_1,\cdots,x_{n-1},h(x_1,\cdots,x_{n-1})) - F_n(x_1,\cdots,x_{n-1},0) \mathrm{d}x_{n-1} \cdots \mathrm{d}x_1 \\
&= \int_{[a_1,b_1]} \cdots \int_{[a_{n-1},b_{n-1}]} F_n(x_1,\cdots,x_{n-1},h(x_1,\cdots,x_{n-1})) \mathrm{d}x_{n-1} \cdots \mathrm{d}x_1 + \int_{Q_n^-} F\nu \mathrm{d}\lambda_{n-1}
\end{aligned}
$$

Für $k < n$:

$$
\begin{aligned}
I_k = &\int_{[a_1,b_1]} \cdots \int_{[a_{k-1},b_{k-1}]} \int_{[a_{k+1},b_{k+1}]} \cdots \int_{[a_{n-1},b_{n-1}]} \\
&\underbrace{\int_{[a_k,b_k]} \int_{[0,h(x_1,\cdots,x_{n-1})]} \frac{\partial}{\partial x_k} F_k(x_1,\cdots,x_{n-1},h(x_1,\cdots,x_{n-1})) \mathrm{d}x_n \, \mathrm{d}x_k}_{=:z_k} \, \mathrm{d}x_{n-1} \cdots \mathrm{d}x_{k+1} \, \mathrm{d}x_{k-1} \cdots \mathrm{d}x_1
\end{aligned}
$$

Zur abkürzenden Schreibung betrachten wir $(x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_{n-1})$ für z_k als konstant und lassen es weg.

$$
\begin{aligned}
z_k &= \int_{a_k}^{b_k} \int_{0}^{h(x_k)} \frac{\partial}{\partial x_k} F_k(x_k,x_n) \mathrm{d}x_n \, \mathrm{d}x_k = \int_{[a_k,b_k]} \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{[0,h(x_k)]} F_k(x_k,x_n) \mathrm{d}x_n - F_k(x_k,h(x_k)) \frac{\partial}{\partial x_k} h(x_k) \mathrm{d}x_k \\
&= \int_{[0,h(b_k)]} F_k(b_k,x_n) \mathrm{d}x_n - \int_{[0,h(a_k)]} F_k(a_k,x_n) \mathrm{d}x_n - \int_{[a_k,b_k]} F_k(x_k,h(x_k)) \frac{\partial}{\partial x_k} h(x_k) \mathrm{d}x_k \\
I_k &= \int_{[a_1,b_1]} \overset{\text{ohne } k}{\cdots} \int_{[a_{n-1},b_{n-1}]} z_k(x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_{n-1}) \mathrm{d}x_{n-1} \overset{\text{ohne } k}{\cdots} \mathrm{d}x_1 \\
&= \int_{[a_1,b_1]} \overset{\text{ohne } k}{\cdots} \int_{[a_{n-1},b_{n-1}]} \int_{[0,h(b_k)]} F_k(x_1,\cdots,x_{k-1},b_k,x_{k+1},\cdots,x_n) \mathrm{d}x_n \, \mathrm{d}x_{n-1} \overset{\text{ohne } k}{\cdots} \mathrm{d}x_1 \\
&- \int_{[a_1,b_1]} \overset{\text{ohne } k}{\cdots} \int_{[a_{n-1},b_{n-1}]} \int_{[0,h(a_k)]} F_k(x_1,\cdots,x_{k-1},a_k,x_{k+1},\cdots,x_n) \mathrm{d}x_n \, \mathrm{d}x_{n-1} \overset{\text{ohne } k}{\cdots} \mathrm{d}x_1 \\
&- \int_{[a_1,b_1]} \overset{\text{ohne } k}{\cdots} \int_{[a_{n-1},b_{n-1}]} F_k(x_1,\cdots,x_{n-1},h(x_1,\cdots,x_{n-1})) \frac{\partial}{\partial x_k} h(x_1,\cdots,x_{n-1}) \mathrm{d}x_{n-1} \overset{\text{ohne } k}{\cdots} \mathrm{d}x_1 \\
&= \int_{Q_k^+} F\nu \mathrm{d}\lambda_{n-1} + \int_{Q_k^-} F\nu \mathrm{d}\lambda_{n-1} \\
&- \int_{[a_1,b_1]} \overset{\text{ohne } k}{\cdots} \int_{[a_{n-1},b_{n-1}]} F_k(x_1,\cdots,x_{n-1},h(x_1,\cdots,x_{n-1})) \frac{\partial}{\partial x_k} h(x_1,\cdots,x_{n-1}) \mathrm{d}x_{n-1} \overset{\text{ohne } k}{\cdots} \mathrm{d}x_1
\end{aligned}
$$

Insgesamt ergibt sich

$$\int_{\tilde{W}} \operatorname{div}(F(x))\mathrm{d}\lambda_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\int_{Q_k^+} Fv\mathrm{d}\lambda_{n-1} - \int_{Q_k^-} Fv\mathrm{d}\lambda_{n-1}\right) + \int_{Q_n^-} Fv\mathrm{d}\lambda_{n-1}$$

$$+ \underbrace{\int_{[a_1,b_1]} \cdots \int_{[a_{n-1},b_{n-1}]} F_n(x_1,\cdots,x_{n-1},h(x_1,\cdots,x_{n-1})) - \sum_{k=1}^{n-1} F_k(\cdots)\frac{\partial h}{\partial x_k}(\cdots)\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\mathrm{d}x_1}_{\overset{\text{siehe unten}}{=} \int_{[a_1,b_1]}\cdots\int_{[a_{n-1},b_{n-1}]} F\cdot\begin{pmatrix}-\nabla h\\ 1\end{pmatrix}\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\mathrm{d}x_1 \\ = \int_{Q_n^+} Fv\mathrm{d}x_{n-1}}$$

$$= \int_{\partial\tilde{W}} Fv\mathrm{d}\lambda_{n-1}$$

Beweis (Korollar 92 (Orientierbarkeit)) 2. Teil
Dies zeigt auch die letzte Gleichheit oben. Wir schreiben X für $x_1,\cdots,x_{n-1}$.

$$M = \gamma(\Omega), \gamma(\omega) = \begin{pmatrix}\omega\\ h(\omega)\end{pmatrix}, w \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$$

$$v(x) = \nabla(x_n - h(X))^T = (-\nabla h, 1)^T$$

$$\oint_M Fv\mathrm{d}\lambda_{n-1} = \int_\Omega F(X,h(X))\begin{pmatrix}-\nabla h(X)\\ 1\end{pmatrix}\underbrace{\frac{\sqrt{g_\gamma}}{\sqrt{1+\|\nabla h(X)\|^2}}}_{=1}\mathrm{d}\lambda_{n-1}(X)$$

$$= \int_\Omega \sum_{k=1}^{n-1}(-F_k(X,h(X))\frac{\partial}{\partial x_k}h(X) + F_n(X,h(X))\mathrm{d}\lambda_{n-1}(X)$$

97 **Lemma:**
Falls $\gamma\colon \Omega \to M \subset \mathbb{R}^n, \Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ist und $\gamma'(x) = \left(\frac{\partial\gamma}{\partial\omega_j}\right)_{j=1,\cdots,n-1} =: A$ den Rang $n-1$ für alle $x \in \Omega$ hat, so ergibt sich eine Normale durch das *äußere Produkt* oder *Dachprodukt*

$$v(x) = a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_{n-1} := \left((-1)^{k-1}\det(A_k)\right)_{k=1,\cdots,n} \in \mathbb{R}^n$$

wobei $a_1,\cdots,a_{n-1}$ die Spalten von A sind und A_k aus A bei weglassen der k-ten Zeile entsteht.
Es gelten folgende Eigenschaften:

(i) $b^T(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_{n-1}) = \det\begin{pmatrix}b & A\end{pmatrix}$ insbesondere ist $\bigwedge_{j=1}^{n-1} a_j$ orthogonal zu allen Spaltenvektoren von A, also der Kern von A^T und deshalb eine Normale.

(ii) $\|a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_{n-1}\| = \sqrt{\det(A^TA)} = \sqrt{g_\gamma}$

(iii) $\bigwedge_{j=1}^{n-1} a_j$ ist multilinear und alternierend / antisymetrisch das heißt $\bigwedge_{j=1}^{n-1} a_j = \operatorname{sgn}(\sigma) \bigwedge_{j=1}^{n-1} a_{\sigma(j)}$ für $\sigma \in S_{n-1}$.

Beweis (97)

(i) Nach Lagrangschem Entwicklungssatz ist

$$\det\begin{pmatrix} b_1 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1}\end{pmatrix} = b_1 \det A_1 - b_2 \det A_2 + \cdots + (-1)^{n-1} b_n \det A_n = b^T(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_{n-1})$$

(ii) Wir setzen $a := a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_{n-1}$ dann ist

$$\left(\|a\|^2\right)^2 \stackrel{1}{=} \det\begin{pmatrix} a & A\end{pmatrix}^2 = \det\left(\begin{pmatrix} a^T \\ A^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & A\end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} a^T a & 0 \\ 0 & A^T A\end{pmatrix} = a^T a \det(A^T A)$$

$$\Rightarrow \|a\|^4 = \|a\|^2 \det(A^T A) \Rightarrow \|a\| = \sqrt{\det(A^T A)}$$

(iii) folgt unmittelbar aus der entsprechenden Eigenschaft der Determinante.

98 **Korollar:**

Für $M = \gamma(\Omega)$ gilt

$$\oint_M f(x)^T \frac{\nu(x)}{\|\nu(x)\|} \mathrm{d}\lambda_{n-1}(x) = \int_\Omega f(\gamma(\omega))^T \bigwedge_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \gamma}{\partial \omega_j} \mathrm{d}\lambda_{n-1}(\omega)$$

Beispiel Torus

$$\gamma(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} (R + r\cos\theta)\cos\varphi \\ (R + r\cos(\theta))\sin(\varphi) \\ r\sin(\theta)\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -(R + r\cos(\theta))\sin(\varphi) & -r\sin\theta\cos\varphi \\ (R + r\cos\theta)\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ 0 & r\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \nu = a_1 \wedge a_2 = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi(R + r\cos\theta) \\ r\cos\theta\sin\varphi(R + r\cos\theta) \\ r\sin\theta(R + r\cos\theta)\end{pmatrix} = r(R + r\cos\theta)\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

99 **Lemma:**

Ein C¹-Polyeder hat auf dem regulären Rand $\partial^r G$ eine eindeutig definierte äußere Einheitsnormale $\nu(x)$ für $x \in \partial^r G$ wobei $\nu(x) = \frac{\nabla q(x)}{\|\nabla q(x)\|}$ für eine Funktion $q \in C^1(U, \mathbb{R}), U \cap G = \{\, x \in U \mid q(x) \leq 0 \,\}$. *Äußere Normale* heißt, dass in einer Umgebung von 0 gilt: $x + t\nu(x) \in G \Leftrightarrow t \leq 0$.

Beweis (99) Betrachte

$$\frac{d}{dt}q(x+t\nu(x))\Big|_{t=0} = \nabla q(x)^T\nu(x) = \|\nabla q(x)\| > 0$$

100 **Satz: Divergenzsatz von Gauß**

Seien $F \in C^1(U,\mathbb{R}^n), U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $G \subset U$ ein C¹-Polytop. Dann gilt

$$\int_{\partial G} F(x)^T \frac{\nu(x)}{\|\nu(x)\|} \mathrm{d}\lambda_{n-1}(x) = \oint_G \operatorname{div}(F(x))\mathrm{d}\lambda_n(x)$$

Beweis (100) Skizze

Überdecke den kompakten singulären Rand $\partial G \setminus \partial^r G$ mit Würfeln $(W_i)_{i=1,\cdots,m}$ der Kantenlängen r_i so, dass $\sum_{i=1}^m r_i^n < \varepsilon$, was geht, da $\partial G \setminus \partial^r G$ eine $(n-1)$-Nullmenge ist. Zerlege dann den Rest $G \setminus \bigcup_{i=1}^m W_i$ in Bereiche auf denen Lemma 97 gilt. Schätze schließlich die Differenz über $\bigcup_{i=1}^m W_i$ und dessen Rand geeignet ab.

101 **Korollar:**

Sei G wie oben, $F(x) = \varphi(x)\nabla f(x), f \in C^2(U,\mathbb{R}), \varphi \in C^1(U,\mathbb{R})$ sowie $f_\nu(x) := \nabla f(x)\nu(x)$ die Normalenableitung, dann gilt

$$\int_{\partial G} \varphi(x)f_\nu(x)\mathrm{d}\lambda_{n-1}(x) = \int_G \nabla\varphi(x)^T\nabla f(x)\mathrm{d}\lambda_n(x) + \int_G \varphi(x)\Delta f(x)\mathrm{d}\lambda_n(x)$$

$$\int_{\partial G} \varphi(x)f_\nu(x) - f(x)\varphi_\nu(x)\mathrm{d}\lambda_{n-1}(x) = \int_G \varphi(x)\Delta f(x) + f(x)\Delta\varphi(x)\mathrm{d}\lambda_n(x) \quad \text{falls } \varphi \in C^2(U)$$

Beweis (Greensche Formeln) Die erste Gleichung folgt mit

$$\operatorname{div}(F(x)) = \nabla\varphi(x)^T\nabla f(x) + \varphi(x)\Delta f(x)$$

$$\Delta f(x) = \operatorname{div}(\nabla f(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Die zweite gilt wegen Symmetrie.

Idee Der Satz von Gauß in der Ebene gibt den Satz von Stokes auf einer Fläche im $\mathbb{R}^3$. Betrachten wir $n = 2$ mit:

$$F(x,y) = (f(x,y), g(x,y)), G \subset \mathbb{R}^2 \text{ mit stückweise glattem Rand } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \gamma(\omega) = \begin{pmatrix} x(\omega) \\ y(\omega) \end{pmatrix}$$

$$\nu(x) = \bigwedge \begin{pmatrix} x'(\omega) \\ y'(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(\omega) \\ -x'(\omega) \end{pmatrix}$$

$$\int_{\partial G} F(x,y)^T \frac{\nu(x,y)}{\|\nu(x,y)\|}\mathrm{d}\lambda_1(x,y) = \int_{[0,T]} \big(f(x(\omega),y(\omega)) \quad g(x(\omega),y(\omega))\big) \begin{pmatrix} y'(\omega) \\ -x'(\omega) \end{pmatrix} \mathrm{d}\lambda_1(\omega)$$

$$= \oint_G \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}\lambda_2(x,y)$$

Das erste Integral lässt sich als Kurvenintegral der Vektorfunktion $\tilde{F}$ interpretieren:

$$\tilde{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -g(x,y) & f(x,y) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \tilde{f}(x,y) & \tilde{g}(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\int_0^T f(\gamma(\omega))y'(\omega) - g(\gamma(\omega))x'(\omega)\mathrm{d}\omega = \int_0^T \tilde{F}(\gamma(\omega))^T\gamma'(\omega)\mathrm{d}\omega$$

$$= \text{ Wegintegral entlang des Weges } \gamma$$

$$\overset{\text{Gauß}}{=} \oint_G \frac{\partial\tilde{g}(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial\tilde{f}(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}(x,y)$$

$$= \oint_G \left(\operatorname{rot}\begin{pmatrix} \tilde{f}(x,y) \\ \tilde{g}(x,y) \\ 0 \end{pmatrix}\right)^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\mathrm{d}(x,y) = \int_0^T \tilde{F}(\gamma(\omega))\gamma'(\omega)\mathrm{d}\omega$$

Allgemeiner betrachte eine Fläche $M = \begin{pmatrix} x(\omega,\delta) & y(\omega,\delta) & z(\omega,\delta) \end{pmatrix}$ mit Rand $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \gamma(t)$ und eine Funktion (wir lassen die Tilde weg) $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} f(x,y,z) \\ g(x,y,z) \\ h(x,y,z) \end{pmatrix}$. Dann gilt für γ stückweise differenzierbar und $F \in C^1$

$$\oint_M \operatorname{rot}(F)\nu\mathrm{d}\lambda_2 = \int_0^T F(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t$$

wobei

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} = e_1\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) - e_2\left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}\right) + e_3\left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

102 **Satz: Satz von Stokes**

Betrachte die C¹-Fläche $M = \begin{pmatrix} x(\omega,\varphi) & y(\omega,\varphi) & z(\omega,\varphi) \end{pmatrix}$ mit dem Rand $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T = \gamma(t)$ und einer Vektorfunktion

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} f(x,y,z) & g(x,y,z) & h(x,y,z) \end{pmatrix} \in C^1(M,\mathbb{R}^3)$$

Dann gilt mit $\gamma\colon [0,T] \to \partial M$ stückweise differenzierbar:

$$\oint_M \operatorname{rot}(F(\omega,\varphi))\frac{\nu(\omega,\varphi)}{\|\nu(\omega,\varphi)\|}\mathrm{d}\lambda_2(\omega,\varphi) = \int_0^T F(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t$$

Beweis (102)

$$\nu = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\omega} \\ \frac{\partial y}{\partial\omega} \\ \frac{\partial z}{\partial\omega} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_\omega z_\varphi - y_\varphi z_\omega \\ x_\varphi z_\omega - x_\omega z_\varphi \\ x_\varphi y_\varphi - x_\varphi z_\omega \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} h_y - g_z \\ f_z - h_x \\ g_x - f_y \end{pmatrix} = \mathrm{rot}(F)$$

$$X := \big(x(\omega,\varphi), y(\omega,\varphi), z(\omega,\varphi)\big)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}(F)\nu = &((f_x x_\omega) + f_y y_\omega + f_z z_\omega)x_\varphi - ((f_x x_\varphi) + f_y y_\varphi + f_z z_\varphi)x_\omega \\ &+(g_x x_\omega + (g_y y_\omega) + g_z z_\omega)y_\varphi - (g_x x_\varphi + (g_y y_\varphi) + g_z z_\varphi)y_\omega \\ &+(h_x x_\omega + h_y y_\omega + (h_z z_\omega))z_\varphi - (h_x x_\varphi + h_y y_\omega + (h_z z_\varphi))z_\omega \\ = &\frac{\partial}{\partial\omega}(f(X)x_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(f(X)x_\omega) + \frac{\partial}{\partial\omega}(g(X)y_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(g(X)y_\omega) + \frac{\partial}{\partial\omega}(h(X)z_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(h(X)z_\omega)\end{aligned}$$

Nach der Uminterpretation des Gaußschen Satzes in der Ebene lässt sich das Integral über $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ gleichsetzen zu dem Integral über dem Rand $\partial\Omega$ des Gebietes Ω und wir erhalten

$$\oint_\Omega \tilde{g}_\omega - \tilde{f}_\varphi \mathrm{d}\lambda_2(\omega,\varphi) = \int_0^t \begin{pmatrix} \tilde{f} & \tilde{g} \end{pmatrix} \tilde{\gamma}'(t)\mathrm{d}t$$

$$\oint_\Omega \frac{\partial}{\partial\omega}(f(X)x_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(f(X)x_\omega)\mathrm{d}\lambda_2(\omega,\varphi) = \int_0^T \begin{pmatrix} f(X)x_\omega \\ f(X)x_\varphi \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial\omega}{\partial t} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial t} \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^T f(x,y,z)(x_\omega \frac{\partial\omega}{\partial t} + x_\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial t})\mathrm{d}t = \int_0^T f(x,y,z)\frac{\partial x}{\partial t}\mathrm{d}t$$

Summation über alle 3 Komponenten ergibt

$$\int_0^T f\frac{\partial x}{\partial t} + g\frac{\partial y}{\partial t} + h\frac{\partial z}{\partial t}\mathrm{d}t = \int_0^T F(\gamma(t))^T \gamma'(t)\mathrm{d}t$$

Beispiel (J.C. Amazigo und L.A. Rubenfeld: Advanced Calculus and Its Applications to the Engineering and Physical Sciences)

Wir betrachten den Ellipsoid der durch die Formel $3x^2 + 3y^2 + z^2 = 28$ gegeben ist und M als die Fläche oberhalb on $z = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9$. Dann ist

$$F = \begin{pmatrix} yz^2 & 4xz & x^2yz \end{pmatrix} \overset{z=1}{=} \begin{pmatrix} y & 4x & x^2y \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rot}(F) = \begin{pmatrix} x^2z - 4x \\ 2yz - 2xyz \\ 4z - z^2 \end{pmatrix} \overset{z=1}{=} \begin{pmatrix} x^2 - 4x \\ 2y - 2xy \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\oint_M \mathrm{rot}(F)\frac{\nu}{\|\nu\|}\mathrm{d}\lambda_2 = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 3\sin t \\ 4 \cdot 3\cos t \end{pmatrix}^T \cdot 3 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (-9\sin^2 t + 36\cos^2 t)\mathrm{d}t = 27\pi$$

Überprüfung mit dem Gaußschen Divergenzsatz

$$G = \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 1 \leq z \leq \sqrt{28 - x^2 - y^2} \right\}$$

ist ein C¹-Polytop mit regulärem Rand bestend aus M° und der Kreisscheibe $\left\{ (x, y, 1) \;\middle|\; x^2 + y^2 < 9 \right\}$. Allgemein gilt

$$\tilde{F} = \mathrm{rot}(F) \Rightarrow \mathrm{div}(\tilde{F}) = \mathrm{div}(\mathrm{rot}(F)) = 0$$

In unserem Fall bedeutet das:

$$\int_{\partial G} \tilde{F} \frac{\nu}{\|\nu\|} \mathrm{d}\lambda_2 = \int_G \mathrm{div}(\mathrm{rot}(F)) \mathrm{d}\lambda_3 = 0$$

$$\Rightarrow \int_M \mathrm{rot}(F)^T \frac{\nu}{\|\nu\|} \mathrm{d}\lambda_2 = -\int_{\left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2<9 \right\}} \mathrm{rot}(F)^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}(x, y) = \int_{\left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2<9 \right\}} 3 \mathrm{d}(x, y)$$

$$= 3\lambda_2(\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 < 9 \right\}) = 27\pi$$